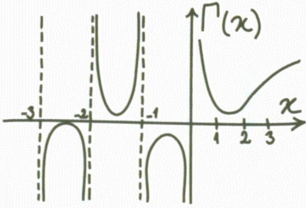
Prof. Dr. Zeynel YALÇIN

Fizikte Matematik Metodlara Giriş

Öğrenme ve Geliştirme:
Temel Kavramlar-Teori-Örnek Çözümler

138 Çözümlü Örnek, **84** Şekil
86 Bölüm Sonu Problemi ile Desteklenmiştir



$$\text{rot}\,\vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i |u_i\rangle$$

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{a} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\, dv$$

seçkin

Prof. Dr. Zeynel YALÇIN
Yıldız Teknik Üniversitesi

FİZİKTE MATEMATİK METODLARA GİRİŞ

Öğrenme ve Geliştirme:
Temel Kavramlar-Teori-Örnek Çözümler

- **Konular:**
  - **Vektörler**
  - **Bir Alanın Türevi ve Vektör İntegral**
  - **Matrisler**
  - **Dik Eğrisel Koordinatlar**
  - **Lineer Vektör Uzayları ve Lineer İşlemciler**
  - **Bazı Özel Fonksiyonlar ve Ortogonal Polinomlar**

138 Çözümlü Örnek, 84 Şekil
86 Bölüm Sonu Problemi ile Desteklenmiştir

SEÇKİN | Fen Bilimleri

Ankara 2019

seçkin

Fizikte Matematik Metodlara Giriş
Zeynel YALÇIN

SEÇKİN | Fen Bilimleri
No: 62

ISBN 978-975-02-5518-2

Birinci Baskı: Haziran 2019

Kapak Tasarımı:
Yiğit Can AYDIN

264 Sayfa, 16x23,5 cm.

1. Fizik
2. Matematik
3. Fen Bilimleri
4. Mühendislik
5. Vektör
6. Matris

Satış ve Dağıtım:
Yayınevi Merkezi
Mustafa Kemal Mah. 2158. Sokak No: 13 Çankaya/ANKARA
Tel: 0-312-435 30 30 | Faks: 0-312-435 24 72 | seckin@seckin.com.tr

İstanbul Çağlayan Adliyesi Şubesi
D Blok 2. Bodrum Kat No: 1
Çağlayan
Tel: (212) 240 00 15
Faks: (212) 240 00 15
caglayan@seckin.com.tr

İstanbul Kartal Adliyesi Şubesi
C Blok Zemin Kat No: 29
Kartal
Tel: (216) 303 11 23
Faks: (216) 303 11 23
kartalsube@seckin.com.tr

İstanbul Şişli Şubesi
Abide-i Hürriyet Cad.
No: 183/A Şişli
Tel: (212) 234 34 77
Faks: (212) 231 24 69
sislisube@seckin.com.tr

İstanbul Bölge Adliye Mahkemesi Şubesi
C Blok Zemin Kat No: 23
Kartal
Tel: (216) 303 20 00 / 5462
bamsube@seckin.com.tr

Ankara Strazburg Cad. Şubesi
Strazburg Cad. 23/B Sıhhiye
Tel: (312) 230 52 62
Faks: (312) 230 52 62
ankarasube@seckin.com.tr

Web Sitesi: www.seckin.com.tr

Seçkin Yayıncılık Sertifika No: 12416

Baskı:
Sözkesen Matbaacılık Tic. Ltd. Şti. – Sertifika No: 13268
İVOGSAN 1518 Sok. Mat-Sit İşmerkezi No: 2/40 Yenimahalle/ANKARA - Tel: (0-312) 395 21 10

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

Bu kitap Fizik, Fizik Mühendisliği ve Fizik Öğretmenliği programlarında öğrenim gören öğrencilere okutulan "Fizikte Matematik Metodlar" dersi için yazıldı. Kitap, bir süredir verdiğim dersin ders notlarına ait içeriği her yıl biraz daha zenginleştirmek suretiyle ortaya çıktı.

"Fizikte Matematik Metodlar" dersi, bazı bölümlerde "Fizikte Matematik Metodlar 1" ve "Fizikte Matematik Metodlar 2" olarak iki dönem zorunlu olarak okutulurken, diğer bazılarında "Fizikte Matematik Metodlar 2" dersi seçmelidir. Altı bölümden oluşan kitap, bir dönem ve haftalık 4-6 saatlik bir müfredat için uygundur. Bazı değişiklikler hariç tutulursa, bölümlerin sıralaması ana hatlarıyla mevcut kaynaklara göre yapıldı. Okuyucuların ve özellikle de öğrencilerin konuları kolayca anlamalarını sağlamak için basit ve açık bir uslup kullanıldı. Kitapta, bir çok ispat yapıldı ve bol örnek çözümleriyle desteklendi. Bölüm sonlarına problemler eklendi ve bazılarının cevapları verildi. Bu yolla lisans öğrencilerine istedikleri takdirde, öğrendiklerini pekiştirme imkanı sağlandı. Fizik ve Mühendislik alanında lisanüstü eğitim gören öğrencilerin de kitaptan yararlanabilecekleri kanaatindeyim.

Kitaptaki şekilleri kızım Meryem YALÇIN çizdi. Kendisine ve kitabın baskıya hazır hale gelinceye kadar ki her aşamasında yardımlarını esirgemeyen akademik camianın kıymetli üyelerine teşekkürü bir borç bilirim. Kitabın basımını üstlenen Seçkin Yayıncılık ekibine, özellikle basım sürecini takip eden Mesut YILDIRIM'a teşekkür ederim.

Az da olsa kitabın bazı boşlukları doldurduğunu ve bir takım ihtiyaçları karşıladığını görmek en büyük temennimdir. Meslektaşlarım tarafından yapılacak her türlü bilimsel eleştriri ve uyarılara açık olduğumu belirtmek isterim. Bu yolla daha iyi bir kaynak kitap ortaya çıkacaktır.

ŞEKİL LİSTESİ

TABLO LİSTESİ

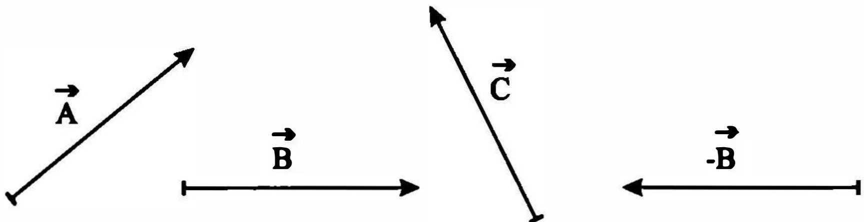


BÖLÜM 1 VEKTÖRLER

Fizikte sıklıkla karşılaştığımız niceliklerden bir kısmı, sadece bir büyüklükle yani uygun birimli reel bir sayı ile tanımlanırlar. Enerji(E), kütle(m), zaman(t), sıcaklık(T), hacim(V) bunlardan bazılarıdır. Bu tür niceliklere skaler nicelikler denir. Skaler nicelikler kullanılan koordinat sistemine göre değişmezler ve bunlarla toplama, çıkarma, çarpma ve bölme gibi cebirsel işlemler yapılabilir.

Diğer bazı nicelikler ise büyüklüklerine ek olarak, yönlerini de belirtmek suretiyle tanımlanan vektörel niceliklerdir. Vektörel bir niceliği temsil eden harfin üzerine bir ok işareti konarak yazılır. Örneğin $\vec{A}$, $\vec{B}$ gibi. Yer değiştirme($\vec{r}$), hız($\vec{v}$), ivme($\vec{a}$), kuvvet($\vec{F}$), lineer momentum($\vec{P}$) ve açısal momentum($\vec{L}$) bunlardan bazılarıdır. Vektörler, uzayda yönlü bir okla gösterilirler. Okun yönü vektörün yönünü ifade etmektedir. Vektörün boyuna, o vektörün büyüklüğü veya şiddeti denir. Ölçekli çizimlerin kullanıldığı grafik yönteminde daha uzun vektör, daha büyük vektör anlamına gelmektedir. Bir vektörün yönü ve büyüklüğü değişirse, bu artık eski vektör olmayıp yeni bir vektördür.

Bir koordinat sisteminde bir vektörün yönünü ve şiddetini değiştirmeksizin, bir konumdan başka bir konuma taşınabilir. Diğer bir deyişle, bir vektörün bir koordinat sistemindeki konumu onun durumunu değiştirmez. Vektörler hem büyük hem de küçük harflerle temsil edilebilir. Kaynak kitapların bazılarında oklu harf yerine koyu karakterler kullanıldığı görülmektedir: **A**, **r**, **v**, **a** gibi. Bu temsille hem yazım kolaylığı sağlanmakta hem de fazladan yer kullanımının önüne geçilmiş olmaktadır. Biz de metin içinde bu ikinci temsili kullanacağız. Şekil 1.1'de bazı vektör gösterimleri verilmiştir.

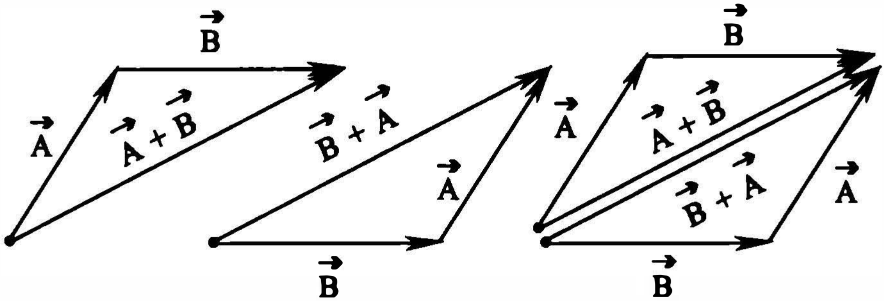


Şekil 1.1 Vektörlerin grafiksel gösterimi

Vektörel niceliklerde toplama, çıkarma, çarpma işlemleri tanımlı olmasına rağmen, bölme işlemi tanımlı değildir. Yani iki vektör birbirine bölünemez.

1.1 Vektörlerin Toplanması

Toplanacak **A** ve **B** vektörleri, aynı fiziksel büyüklüğü temsil eden iki vektör olmak zorundadır. Örneğin bunlar $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ ile gösterilen iki kuvvet vektörü olabilir. Toplam vektöre bileşke vektör denir. Bileşke vektör, toplanan vektörlerin yapacağı etkiyi tek başına yapan vektördür. Grafik yöntemine göre **A** vektörüne **B** vektörünü eklemek yani, $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ işlemini yapmak için **B** vektörünün yönü ve uzunluğu değiştirilmeksizin kaydırılarak, başlangıcı **A** vektörünün ucuna gelecek şekilde yerleştirilir. **A** vektörünün başlangıcından **B** vektörünün ucuna çizilen vektör toplam vektördür. Toplam vektör, toplanan vektörlerin boyutundadır. Örneğin, iki kuvvet vektörünün toplamı yine bir kuvvet vektörüdür. **B** vektörüne **A** vektörü eklenirse yani $\mathbf{B} + \mathbf{A}$ işlemi yapılırsa, $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ile aynı bileşke vektörünü verdiği bir paralel kenar dörtgen yardımı ile gösterilebilir(Şekil 1.2).



Şekil 1.2 Grafik yöntemiyle iki vektörün toplanması

Buna göre; toplama işleminde değişme özelliği vardır. Yani yapılan işlemin sırası değişse de sonuç aynı olmaktadır. Sonuç açısından işlem sırası önemli değildir. Bu durum üç vektörün toplamı için de geçerlidir. $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$ işlemi, $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ şeklinde veya $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ biçiminde yapılırsa sonuç değişmez. Buna birleşme özelliği denir. Parantezler, yapılacak işlemin önceliğini belirtmektedir. Toplama işlemine göre, eklendiği vektörü değiştirmeyen **0** vektörü tanımlanabilir. Sıfır vektörü, şiddeti sıfır olan vektördür. **0** vektörü toplamaya göre etkisiz elemandır. Bu özellikler

$$i.\ \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \qquad \textit{Değişme özelliği} \qquad (1.1)$$

$$ii.\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \qquad \textit{Birleşme özelliği} \qquad (1.2)$$

$$iii.\ \mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A} \qquad \textit{Etkisiz eleman} \qquad (1.3)$$

şeklinde yazılabilir.

1.2 Vektörlerle Çıkarma İşlemi

Vektörlerle çıkarma işlemi, aynı fiziksel büyüklüğe karşılık gelen iki vektörden birinin, diğerinden farkını bulmak için kullanılır. İki vektör **A** ve **B** olsun. **A** − **B** işlemi, **A** vektörünün **B** vektöründen farkını verir. Bu fark vektör, **B** vektörüne eklenirse **A** vektörü elde edilir. Grafik gösteriminde vektörleri çıkarmanın iki yöntemi vardır:

Birinci yöntem: İlk olarak çıkarılacak vektörün, örneğin **B**'nin toplamaya göre tersi alınır. **B** vektörünün toplama işlemine göre tersi, kendisine eklendiğinde yani toplandığında **0**'ı veren vektördür. Bu tanıma göre **B** vektörünün tersi, büyüklüğü **B** vektörünün ki ile aynı fakat yönü zıt olan −**B** vektörüdür(Bakınız Şekil 1.1). Bu işlem cebirsel olarak **B** vektörünün −**1** ile çarpımına özdeştir: (−1)**B**. Buna bir vektörün bir skalerle çarpımı denir. **A** vektörü ile −**B** vektörünün toplamı **A** − **B** işlemine özdeştir:

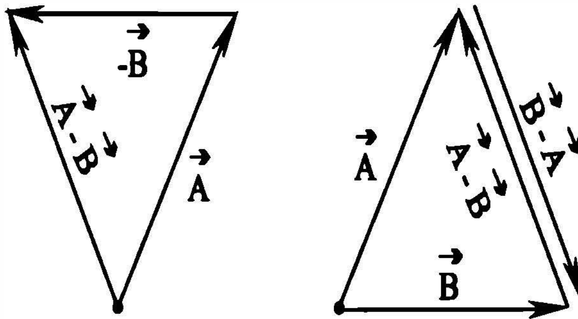
$$\mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = \mathbf{A} - \mathbf{B} \tag{1.4}$$

Şimdi **B** vektörünün **A**'dan farkına bakalım. **B** − **A** fark vektörü, **A** − **B** fark vektörü ile aynı büyüklükte fakat zıt yönde olduğu görülür. Bu durum Şekil 1.3'de verilmiştir. Buna göre çıkarma işleminde değişme özelliği yoktur. Fakat,

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = -(\mathbf{B} - \mathbf{A}) \tag{1.5}$$

eşitliği yazılabilir.

İkinci yöntem: Bu yöntemde, **A** ve **B** vektörlerinin yönleri ve büyüklükleri değiştirilmeksizin başlangıçları bir araya getirilir. İki vektörün uçlarını birleştiren vektörler fark vektörleridir. İki tane fark vektörü çizmek mümkündür. Fark vektörü hangi vektörden başlıyorsa o, çıkan vektördür. Örneğin, **B** vektöründen **A** vektörüne çizilen vektör **A** − **B**'dir(Şekil 1.3).



Şekil 1.3 Grafik yöntemiyle iki vektörün çıkarılması

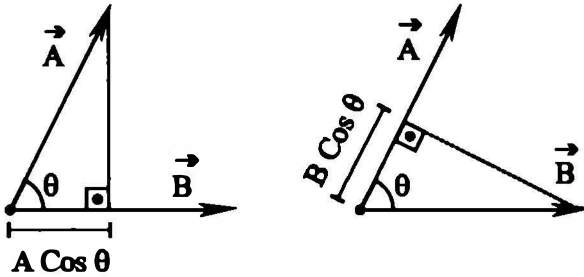
1.3 Vektörlerin Çarpımı

Yukarıda bahsedilen bir vektörün bir skalerle çarpımından farklı olarak iki çeşit vektör çarpımı tanımlanmıştır. Bunlardan biri, (·) biçiminde yazılan

nokta çarpımdır. Bu işlemin sonucu bir sayı olduğundan skaler çarpım da denir. Skaler çarpım

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = ABCos\theta \tag{1.6}$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada A ve B sırasıyla, **A** ve **B** vektörlerinin büyüklüğüdür. θ ise **A** ve **B** vektörleri arasındaki küçük açıdır. Şekil 1.4'te görülebileceği gibi (1.6)'ın sağ tarafı şöyle yorumlanabilir: $ACos\theta$, **A** vektörünün **B** vektörü üzerindeki dik iz düşümün büyüklüğüdür. $ABCos\theta$ ise iz düşüm vektörünün büyüklüğü ile iz düşülen vektörün büyüklüğünün çarpımına eşittir. Benzer bir işlem, **B** vektörü **A** vektörü üzerine iz düşülerek yapılabilir.



Şekil 1.4 İki vektörün birbirleri üzerine dik izdüşümleri

(1.6) eşitliğine göre verilen iki vektörün skaler çarpımı, $\theta = 0$ için en büyük değerini alırken, $\theta = 90$ için sıfır olur. Bu ise vektörlerin dikliği için bir şart ortaya koyar: **A** ve **B** vektörleri dik iseler skaler çarpımları 0, skaler çarpımları 0 ise bu vektörler diktir. Bu durum

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} \perp \mathbf{B} \tag{1.7}$$

biçiminde yazılabilir. (1.6) eşitliğinde **B** vektörünün yerine **A** vektörü yazılır ve aynı iki vektör arasındaki açının $\theta = 0$ olduğu hatırlanırsa

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 \tag{1.8}$$

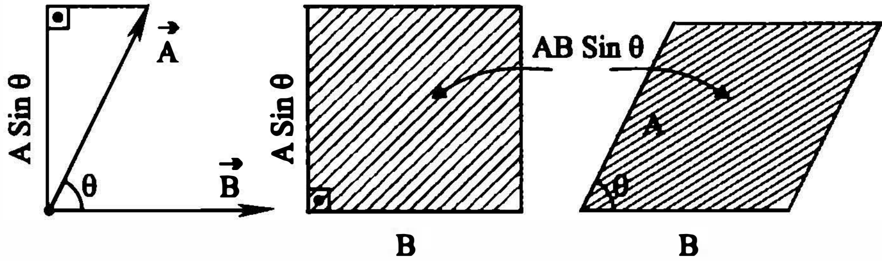
eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten **A** vektörünün büyüklüğü elde edilir.

$$A = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} \tag{1.9}$$

Diğer çarpım ise $(\times)$ şeklinde yazılan vektörel çarpımdır. Bu çarpımın sonucunda bir vektör bulunur. Vektörel çarpımın büyüklüğü

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = ABSin\theta \tag{1.10}$$

eşitliği ile verilir.



Şekil 1.5 Vektörel çarpımın büyüklüğünün grafikle gösterimi

Şekil 1.5'te görüldüğü gibi $ASin\theta$, **A** vektörünün **B** vektörüne dik izdüşümün

büyüklüğüdür. $ABSin\theta$ ise, **A** ve **B** vektörlerinin oluşturduğu düzlemin alanına eşittir. (1.10) eşitliğinden iki vektörün vektörel çarpımının $\theta = 90$ için en büyük değerini aldığı, $\theta = 0$ için ise 0 olduğu açıkça görülür. Buna göre, **A** ve **B** vektörleri paralel ise vektörel çarpımları sıfırdır.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} // \mathbf{B} \qquad (1.11)$$

Vektörel çarpımdan elde edilen sonuç vektörün yönü, hem **A** vektörüne hem de **B** vektörüne diktir. Diğer bir deyişle **A** ve **B** vektörlerinin oluşturduğu düzleme diktir. Sonuç vektörün yönü, sağ el kuralı ile belirlenir. Bu kural şöyledir: **A** × **B** çarpımı için sağ elin dört parmağı birinci vektörü(**A**), ikinci vektör(**B**) üzerine katlarken baş parmak sonuç vektörün yönünü gösterir. Vektörel çarpımda sıra değişirse sonuç vektörün yönü değişir. Bu durumda

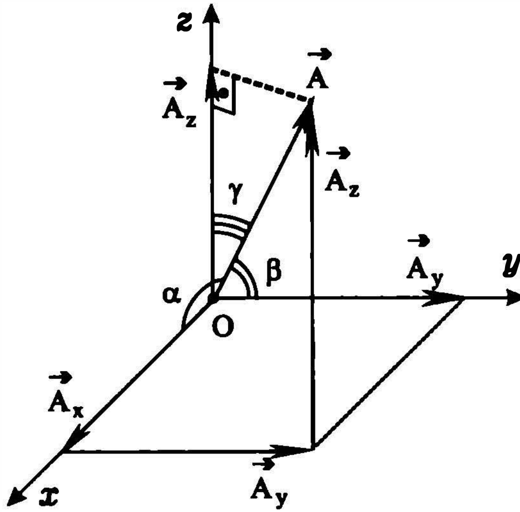
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \qquad (1.12)$$

eşitliği yazılabilir.

1.4 Bir Vektörün Dik Bileşenleri

Kartezyen koordinat sistemi, birbirlerine dik üç doğrunun kesişmesiyle oluşan sistemdir. Bu üç doğru x, y ve z olarak etiketlenir ve dik eksenler adını alırlar. Kesişen üç dik doğru, uzayı sekiz bölgeye ayırır. Şekil 1.6'da x, y ve z eksenlerinin her üçünün de pozitif olduğu bölge gösterilmiştir. Eksen isimleri herhangi birinden başlanarak ve saat ibresi tersine gidilerek

xyz, yzx veya zxy sıralamalarından biri alınarak yapılabilir.



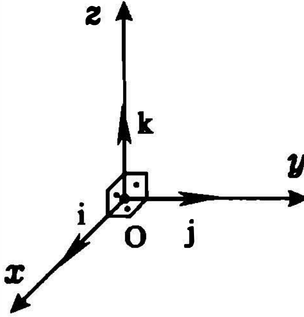
Şekil 1.6 Kartezyen koordinatlarda dik bileşenler

Kartezyen koordinat sisteminde bir vektörü, dik bileşenleriyle belirlemek istiyoruz. Birbirine dik olan ve bileşkesi, söz konusu vektörü veren vektörlere dik bileşenler denir. Kartezyen koordinat sisteminde dik bileşenlerin sayısı üçtür. Dik bileşenlerin sayısı vektörün boyutunu belirler. Orijinden başlayan bir **A** vektörünü x, y ve z eksenleri üzerine dik iz düşürelim. Yine orijinden başlayarak iz düşüm noktalarına çizeceğimiz $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ ve $\mathbf{A}_z$ vektörleri **A** vektörünün dik bileşenlerdir. Şekil 1.6'dan görüldüğü gibi bileşenlerin toplama kuralına göre eklenmesiyle **A** vektörü elde edilmektedir.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z \tag{1.13}$$

Kartezyen koordinatlarda $+x$ yönünde boyu 1 olan vektörü $\widehat{\imath}$, $+y$ yönünde boyu 1 olan vektörü $\widehat{\jmath}$, $+z$ yönünde boyu 1 olan vektörü $\widehat{k}$ ile göstermek adettir. $\widehat{\imath}$, $\widehat{\jmath}$, $\widehat{k}$ vektörleri birimsizdir. $\widehat{\imath}$, $\widehat{\jmath}$, $\widehat{k}$ birim vektörleri Şekil 1.7'de gösterilmiştir. Bazı kaynaklarda $\widehat{\imath}$, $\widehat{\jmath}$, $\widehat{k}$ birim vektörlerinin yerine sırasıyla $\widehat{x}$, $\widehat{y}$, $\widehat{z}$ veya $\widehat{e}_1$, $\widehat{e}_2$, $\widehat{e}_3$ temsilleri kullanılmaktadır. Son gösterim kolayca üçten fazla boyutlu sonlu vektör uzaylarına genellenebilir. Bu konu ileride

detaylarıyla ele alınacaktır.



Şekil 1.7 Kartezyen koordinatlarda birim vektörler

Yazım kolaylığı açısından birim vektörlerin üzerindeki ($\hat{}$) şapkaları atacak ve koyu harflerle göstereceğiz: **i**, **j**, **k** gibi. Bu birim vektörler, sırasıyla A_x, A_y ve A_z bileşenlerin büyüklükleri ile çarpılırsa

$$\mathbf{A}_x = A_x\,\mathbf{i} \tag{1.14a}$$

$$\mathbf{A}_y = A_y\,\mathbf{j} \tag{1.14b}$$

$$\mathbf{A}_z = A_z\,\mathbf{k} \tag{1.14c}$$

$\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ ve $\mathbf{A}_z$ vektör bileşenleri elde edilir. (1.14a), (1.14b) ve (1.14c) ile verilen vektör bileşenleri taraf tarafa toplanırsa **A** vektörü bulunur.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z = A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k} \tag{1.15}$$

Vektör bileşenleri $-x$, $-y$ veya $-z$ yönünde iseler, birim vektörlerin işaretini değiştirmek, yani $-\mathbf{i}$, $-\mathbf{j}$, $-\mathbf{k}$ olarak yazmak yeterli olacaktır. A_x, A_y, A_z büyüklüklerini bulmak için **A** vektörün sırasıyla x, y ve z eksenleri ile yaptığı açılar α, β ve γ açılarını ve $A = |\mathbf{A}|$ vektörünün büyüklüğünü bilmek yeterli olur.

$$A_x = ACos\alpha \tag{1.16a}$$

$$A_y = ACos\beta \tag{1.16b}$$

$$A_z = ACos\gamma \tag{1.16c}$$

α, β ve γ açıları **A** vektörün yönelimini belirledikleri için doğrultman açıları, $Cos\alpha$, $Cos\beta$ ve $Cos\gamma$ kosinüslerine ise doğrultman kosinüsleri denir(Şekil 1.6). (1.16a), (1.16b) ve (1.16c) ile verilen bileşenlerin kareleri alınıp taraf tarafa toplanırsa

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2\ (Cos^2\alpha + Cos^2\beta + Cos^2\gamma) \tag{1.17a}$$

elde edilir. (1.17a)'nın sol tarafı **A** vektörünün boy karesi A^2'ye eşittir. Öyleyse eşitliğin sağlanması için

$$Cos^2\alpha + Cos^2\beta + Cos^2\gamma = 1 \tag{1.17b}$$

olması gerekir.

1.5 Karetezyen Koordinatlarda Temel Vektör İşlemleri

Bu kesimde, kartezyen koordinatlarda bileşenleriyle verilen vektörlerin toplanması, çıkarılması, skaler ve vektörel çarpım işlemlerini açıklayacağız. İlk olarak toplama işlemi ile başlayalım. $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}$ ve $\mathbf{B} = B_x\mathbf{i}+B_y\mathbf{j}+B_z\mathbf{k}$ vektörlerini göz önüne alalım. $\mathbf{A} \mp \mathbf{B}$ işlemleri, aynı adlı bileşenlerin cebirsel toplamı alınarak yapılır:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mp \mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}) \mp (B_x\mathbf{i}+B_y\mathbf{j}+B_z\mathbf{k}) \\ &= (A_x \mp B_x)\mathbf{i} + (A_y \mp B_y)\mathbf{j} + (A_z \mp B_z)\mathbf{k} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Bunu bir örnekle açıklayalım.

Örnek 1.1 $\mathbf{A} = 2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ ve $\mathbf{B} = \mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ vektörleri veriliyor.
a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} =?$ b) $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} =?$
Çözüm 1.1 a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = (2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+4\mathbf{k}) + (\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}) = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}+7\mathbf{k}$,
b) $3\mathbf{A} = 3(2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+4\mathbf{k}) = 6\mathbf{i}-9\mathbf{j}+12\mathbf{k}$,
$2\mathbf{B} =2(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}) =2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+6\mathbf{k}$,
$3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} = (6\mathbf{i}-9\mathbf{j}+12\mathbf{k}) - (2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+6\mathbf{k}) = 4\mathbf{i}-13\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ bulunur.■

Skaler çarpıma bakalım. (1.6) eşitliğinde $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ vektörlerinin yerine, birim vektörler yazılırsa, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} =0$ ve $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} =1$ olur. Bu göre $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ çarpımı

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}) \cdot (B_x\mathbf{i}+B_y\mathbf{j}+B_z\mathbf{k}) \\ &= A_x B_x (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})+A_xB_y(\mathbf{i} \cdot \mathbf{j})+A_xB_z(\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}) \\ &\quad +A_yB_x(\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}) + A_yB_y(\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) + A_yB_z(\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) \\ &\quad +A_zB_x(\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}) + A_zB_y(\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}) + A_zB_z(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \end{aligned}$$

şeklinde 9 terime sahiptir. Birim vektörlerin skaler çarpımları göz önüne alındığında 6 tanesi 0 olur. Geriye üç terim kalır. Bu durumda iki vektörün skaler çarpımı

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \quad (1.19)$$

şeklinde bir sonuç verir. (1.19) eşitliğinde $\mathbf{B}$ vektörü yerine $\mathbf{A}$ vektörü yazılırsa

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad (1.20)$$

elde edilir. Bu çarpım (1.9) eşitliğinde yerine yazılırsa, $\mathbf{A}$ vektörünün büyüklüğü için

$$A = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1.21)$$

ifadesine ulaşılır. Skaler çarpım yardımı ile verilen keyfi bir $\mathbf{A}$ vektörünün dik izdüşümlerini

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = (A_x\,\mathbf{i}+A_y\,\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} =A_x \quad (1.22a)$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{j} = (A_x\,\mathbf{i}+A_y\,\mathbf{j}+A_z\mathbf{k})\cdot\mathbf{j} = A_y \qquad (1.22b)$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{k} = (A_x\,\mathbf{i}+A_y\,\mathbf{j}+A_z\mathbf{k})\cdot\mathbf{k} = A_z \qquad (1.22c)$$

olarak yazmak mümkündür.

Vektörel çarpıma geçebiliriz. (1.11) ifadesinde **A** ve **B** vektörü yerine aynı birim vektörler yazılırsa, $\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0$ olduğu kolayca anlaşılır. Farklı birim vektörlerin vektörel çarpımları için bir kural bulmak istiyoruz. Bunun için şöyle bir fikir yürütülebilir: İki birim vektörün vektörel çarpımının yine bir vektör olduğunu, sonuç vektörün vektörel çarpıma giren her iki vektöre dik olduğunu hatırlayalım. Diğer yandan (1.12) eşitliğini de göz önüne alalım. Vektörlerin çarpım sırası değişirse işaret değişiyordu. Bu bilgiler ışığında

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k},\quad \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i},\quad \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j} \qquad (1.23a)$$

olarak alınırsa, birim vektörler yer değiştirdiğinde ise

$$\mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k},\ \mathbf{k}\times\mathbf{j} = -\mathbf{i},\ \mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j} \qquad (1.23b)$$

olacağı kolayca anlaşılır. Buna göre iki vektörün vektörel çarpımı

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k})\times(B_x\mathbf{i}+B_y\mathbf{j}+B_z\mathbf{k})$$

$$= A_x\,B_x\,(\mathbf{i}\times\mathbf{i})+A_xB_y(\mathbf{i}\times\mathbf{j})+A_xB_z(\mathbf{i}\times\mathbf{k})$$

$$+A_yB_x(\mathbf{j}\times\mathbf{i}) + A_yB_y(\mathbf{j}\times\mathbf{j}) + A_yB_z(\mathbf{j}\times\mathbf{k})$$

$$+A_zB_x(\mathbf{k}\times\mathbf{i}) + A_zB_y(\mathbf{k}\times\mathbf{j}) + A_zB_z(\mathbf{k}\times\mathbf{k})$$

yine 9 bileşenlidir. Fakat, bu çarpımın 3 tanesi $\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0$ sebebi ile sıfır olur. Geriye kalan 6 terim (1.23a) ve (1.23b) eşitlikleri yardımı ile

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = A_xB_y\mathbf{k} - A_xB_z\mathbf{j} - A_yB_x\mathbf{k}$$

$$+A_yB_z\mathbf{i} + A_zB_x\mathbf{j} - A_zB_y\mathbf{i}$$

biçiminde yazılabilir. Aynı adlı bileşenler bir araya getirilirse vektörel çarpım için

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k} \qquad (1.24)$$

ifadesi elde edilir.

Vektörel çarpımın başka bir yolu şöyledir: 3 × 3'lük bir matrisin birinci satırına birim vektörler yazıldıktan sonra, vektörel çarpıma giren ve birinci vektör olan **A**'nın bileşenlerini ikinci satıra ve ikinci vektör **B**'nin bileşenlerini üçüncü satıra ilgili birim vektörün altına gelecek şekilde yazılır.

Sonra Laplace açılımı kullanılarak birinci satıra göre determinant alınırsa, vektörel çarpım yapılmış olur.

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \tag{1.25}$$

$$=(-1)^{1+1}\mathbf{i}\begin{vmatrix}A_y & A_z\\ B_y & B_z\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\mathbf{j}\begin{vmatrix}A_x & A_z\\ B_x & B_z\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\mathbf{k}\begin{vmatrix}A_x & A_y\\ B_x & B_y\end{vmatrix}$$

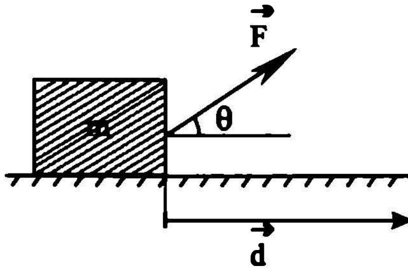
$$=\mathbf{i}(A_yB_z-A_zB_y)-\mathbf{j}(A_xB_z-A_zB_x)+\mathbf{k}(A_xB_y-A_yB_x)$$

düzenlenirse

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\mathbf{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\mathbf{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\mathbf{k}$$

elde edilir. Bu sonuç (1.24) ile aynıdır. Skaler ve vektörel çarpıma örnekler verelim.

Örnek 1.2 Şekil 1.8'deki gibi $\mathbf{F}=10\mathbf{i}+10\mathbf{j}$ N'luk sabit bir kuvvetin etkisindeki bir blok sürtünmesiz yatay bir zeminde $\mathbf{d}=10\mathbf{i}$ m yerdeğiştirirse yapılan işi hesaplayın.



Şekil 1.8 Bir kuvvetin etkisiyle yerdeğiştiren blok

Çözüm 1.2 Fizikte iş W ile gösterilir. Yapılan iş $W=\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}$ skaler çarpımı ile tanımlanır. Buna göre $W=(10\mathbf{i}+10\mathbf{j})\cdot 5\mathbf{i}=50$ Joule'dir.

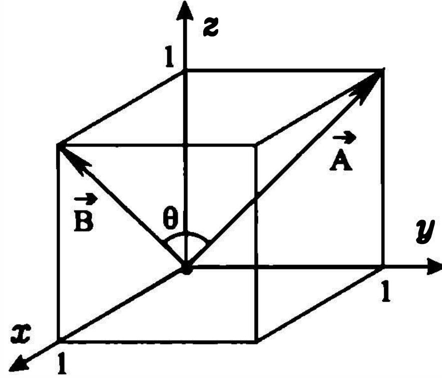
Örnek 1.3 m kütleli bir cisim xy düzleminde orijine göre $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ konumlu yerde iken hızı $\mathbf{v}=v_x\mathbf{i}+v_y\mathbf{j}$'dir. Bu cismin açısal momentumunu hesaplayınız.

Çözüm 1.3 Lineer momentum vektörünü $\mathbf{P}$ ile ve açısal momentum vektörünü ise $\mathbf{L}$ ile gösterelim. Lineer momentum $\mathbf{P}=m\mathbf{v}$ biçimindedir. Açısal momentum ise $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{P}$ vektörel çarpımı ile tanımlanır. Verilenlere göre

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \mathbf{r}\times\mathbf{P}=(x\mathbf{i}+y\mathbf{j})\times m(v_x\mathbf{i}+v_y\mathbf{j})\\ &= m\,(xv_y-yv_x)\,\mathbf{k}\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 1.4a) Şekil 1.9'daki gibi birim küp üzerinde verilen **A** ve **B** vektörlerini birim vektörler cinsinde yazın. **b)** Vektörler arasındaki açıyı bulun. **c)** Bu vektörlerin oluşturduğu düzlemin normalini elde edin.



Şekil 1.9 Birim küp üzerindeki iki vektör

Çözüm 1.4a) **A** ve **B** vektörleri dik bileşenleri yardımı ile

$$\mathbf{A} = \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$$

biçiminde olur. **b)** Gerekli işlemler yapılırsa

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{k}) = 1$$

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{2}, \quad B = |\mathbf{B}| = \sqrt{2}$$

$$Cos\theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{A\ B} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = Cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^o$$

olduğu görülür. **c)** Sağ elin dört parmağı ile **A** vektörünü **B** vektörü üzerine katladığımızda baş parmak yönünde olan normal vektör

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}, \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{k}) = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \sqrt{3}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{3}}$$

olarak bulunur.

Örnek 1.5 Bir parçacığın konum ve hız vektörleri sırasıyla $\mathbf{r}(t) = 2t\ \mathbf{i} + (5 - t)\mathbf{j}$ ve $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ olarak verilmektedir. Konum vektörünün, hız vektörüne dik olduğu t anını bulun.

Çözüm 1.5 Konum vektörü **r**'nin, hız vektörü **v**'ye dik olması için $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$ olmalıdır. $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = [2t\mathbf{i} + (5 - t)\mathbf{j}] \cdot (2\mathbf{i} - \mathbf{j}) = 4t - (5 - t) = 0 \Rightarrow 5t - 5 = 0 \Rightarrow t = 1\ s$ bulunur.■

1.6 Üçlü Vektör Çarpımları

A, **B** ve **C** gibi üç vektörü kullanarak yapılması mümkün iki çarpım vardır: Birincisi $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ biçiminde yazılan üçlü skaler çarpım, diğeri ise $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ şeklinde yazılan üçlü vektör çarpımıdır. Bu isimler sonuca göre verilmiştir. $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ vektör çarpımının yine bir vektör olduğunu biliyoruz. Bunun **A** ile skaler çarpımı olan $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ işleminin sonucu bir skaler iken, **A** ile vektörel çarpımı olan $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ işleminin sonucu bir vektördür.

$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_x\mathbf{i}+B_y\mathbf{j}+B_z\mathbf{k}$ ve $\mathbf{C} = C_x\mathbf{i}+C_y\mathbf{j}+C_z\mathbf{k}$ vektörlerini göz önüne alalım. $(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ işlemi yapılırsa

$$\mathbf{B}\times\mathbf{C} = (B_yC_z - B_zC_y)\mathbf{i} + (B_zC_x - B_xC_z)\mathbf{j} + (B_xC_y - B_yC_x)\mathbf{k}$$

olarak elde edilir. Bunun **A** ile skaler çarpımı

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (A_x\,\mathbf{i}+A_y\,\mathbf{j}+A_z\mathbf{k})\cdot[(B_yC_z - B_zC_y)\,\mathbf{i} + (B_zC_x - B_xC_z)\,\mathbf{j} + (B_xC_y - B_yC_x)\,\mathbf{k}]$$

olur. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) &= A_x(B_yC_z - B_zC_y)+A_y(B_zC_x - B_xC_z)\\ &\quad +A_z(B_xC_y - B_yC_x)\end{aligned} \qquad (1.26)$$

olarak elde edilir. Üçlü skaler çarpımı yapmanın diğer bir yolu şudur: 3×3'lük bir matrisin birinci satırına **A** vektörünün bileşenlerini, sonra sırasıyla ikinci ve üçüncü satıra **B** ve **C** vektörlerinin bileşenlerini yazmak ve determinantını almaktır.

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad (1.27)$$

Birinci satıra göre açılırsa

$$= A_x\begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix} - A_y\begin{vmatrix} B_x & B_z \\ C_x & C_z \end{vmatrix} + A_z\begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix}$$

bulunur. 2×2 matrislerin de determinantları alınır ve düzenlenirse

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = A_x(B_yC_z - B_zC_y)+A_y(B_zC_x - B_xC_z) +A_z(B_xC_y - B_yC_x)$$

elde edilir. Bu sonuç (1.26) ile aynıdır. Bir matrisin iki satırı yer değişirse, determinantın sadece işareti değişir. Eğer iki defa satır değişikliği yapılırsa, determinantın işareti bir kez daha değişerek ilk haline döner. Yani matris

satırları için çift permütasyon yapılırsa, determinantın işareti değişmezken, tek permütasyonda işaret değişir. Buna göre

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \qquad (1.28a)$$

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=-\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{C})=-\mathbf{C}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{A}) \qquad (1.28b)$$

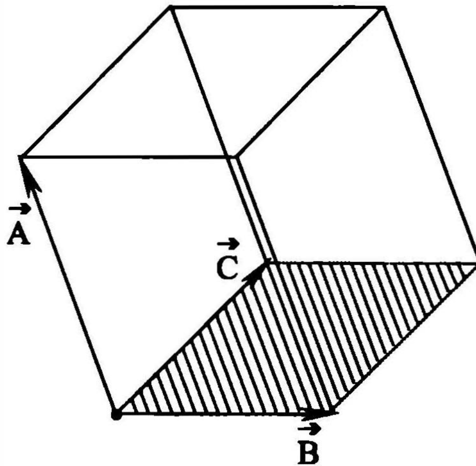
eşitlikleri bulunur. (1.28b) için başka ifadeler yazmak mümkündür.
$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ üçlü skaler çarpımın geometrik bir anlamı vardır. $(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ işleminden elde edilen sonuç vektörün büyüklüğü $|\mathbf{B}\times\mathbf{C}|$, yönü ise **B** ve **C** vektörlerinin oluşturduğu düzleme diktir. Yani yüzey normali yönündedir. Bu durumda

$$\mathbf{B}\times\mathbf{C}=|\mathbf{B}\times\mathbf{C}|\ \mathbf{n}$$

yazılabilir. Bunun **A** vektörü ile skaler çarpımı

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot|\mathbf{B}\times\mathbf{C}|\,\mathbf{n}=|\mathbf{B}\times\mathbf{C}|\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}) \qquad (1.29)$$

olur. (1.29) ifadesindeki $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})$, **A** vektörünün **n** normal vektörü üzerine dik izdüşüm büyüklüğüne, yani tabana dik yüksekliğe eşittir. Böylece, üçlü skaler çarpım **A**, **B** ve **C** vektörlerinin oluşturduğu paralel kenar prizmanın hacime eşittir. Bu hacim Şekil 1.10'da gösterilmiştir.



Şekil 1.10 Üç vektörün oluşturduğu hacim

Üçlü vektör çarpımına bakalım. $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ işleminden elde edilen sonuç vektör, hem **A**'ya hem de $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ vektörüne diktir. Diğer yandan $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$'den elde edilen vektör ise **B** ve **C**'nin oluşturduğu düzleme diktir. Öyleyse $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ vektörü, **B** ve **C**'nin oluşturduğu düzlemdedir.

Örnek 1.6 $\mathbf{A}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{B}=-\mathbf{i}-\mathbf{j}$ ve $\mathbf{C}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}$ vektörlerini veriliyor. $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=?$

Çözüm 1.6 Gerekli işlemler yapılırsa

$$\mathbf{B} \times \mathbf{C} = (-\mathbf{i} - \mathbf{j}) \times (-\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (-2\mathbf{k}) = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

bulunur. Sadece **i** ve **j** birim vektörlerini içerdiklerinden dolayı **B**,**C** ve $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ vektörleri xy düzlemindedir.■

1.7 Vektör Çarpımı İçeren İşlemlerin İndirgenmesi

Vektör bileşenleriyle çalışmak, vektör çapımlarını basitleştirir. Bunun için iki tane matematiksel aracı tanıtmak yararlı olacaktır. Birincisi

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \tag{1.30}$$

biçiminde tanımlanan Kronecker Delta'dır. Burada i ve j birim vektör değil indislerdir. Etiketlemek amacıyla kullanılır. Üç boyutlu uzayda $i = 1, 2, 3$ ve $j = 1, 2, 3$ değerlerini alabilir. İki indisli Kronecker Delta'nın sıklıkla kullanıldığı üç yer vardır. Birincisi, iki vektörün skaler çarpımında kullanılır. **A** ve **B** vektörleri indis yardımı ile $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$ ve $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_1 + B_2\mathbf{e}_2 + B_3\mathbf{e}_3$ biçiminde yazılır. Burada $x \to 1$, $y \to 2$, $z \to 3$ ve $\mathbf{i} \to \mathbf{e}_1$, $\mathbf{j} \to \mathbf{e}_2$, $\mathbf{k} \to \mathbf{e}_3$ ile temsil edilmektedir. Skaler çarpım

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3) \cdot (B_1\mathbf{e}_1 + B_2\mathbf{e}_2 + B_3\mathbf{e}_3)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} A_i B_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} A_i B_j \delta_{ij} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \\ &= \sum_{i=1}^{3} A_i B_i \end{aligned} \tag{1.31}$$

biçiminde kısalır. Burada $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ eşitliği kullanıldı. İkincisi, farklı iki dik koordinat sisteminde tanımlanan x_i ve q_j koordinatlarının kısmi türevleri için kullanılır:

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \delta_{ij} \tag{1.32}$$

Üçüncüsü, kuantum mekaniğinde bir sistemin durumunu belirleyen dalga fonksiyonları ψ_i ve ψ_j için ortonormalizasyon bağıntısını ifade etmek için kullanılır. Burada i ve j indisleri kuantum sayılarıdır. Ortonormalizasyon bağıntısı

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_i(x)\psi_j(x)dx = \delta_{ij} \tag{1.33}$$

biçimindedir.

Vektör çarpımlarını indirgemek için kullanılan ikinci matematiksel araç

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & i,j,k \text{ indisleri } 1,2,3\text{'ün çift permütasyonu ise} \\ 0, & i,j,k \text{ indislerinin herhangi ikisi aynı ise} \\ -1, & i,j,k \text{ indisleri } 1,2,3\text{'ün tek permütasyonu ise} \end{cases} \qquad (1.34)$$

biçiminde tanımlanan Levi-Civita tensörüdür. Christoffel sembolleri de denir. Çift permütasyon i, j, k indisleri farklı iki kez değiştirilerek elde edilir. Örneğin, ε_{123}'ü ele alalım. Önce $1 \to 2$ sonra $1 \to 3$ indisleri değiştirilirse ε_{231} elde edilir. Böylece çift permütasyon için

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$$

yazılabilir. Tek permütasyonda ise herhangi iki indis bir kez yerdeğiştirir. Örneğin, ε_{123}'de $1 \to 2$ indisleri değişirse ε_{213} elde edilir. Neticede

$$\varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -1$$

durumları elde edilir. Levi-Civita tensörü kullanılarak vektörel çarpımının nasıl yapıldığına bakalım. $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$ ve $\mathbf{B} = B_1\mathbf{e}_1 + B_2\mathbf{e}_2 + B_3\mathbf{e}_3$ vektörlerini ele alalım.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3) \times (B_1\mathbf{e}_1 + B_2\mathbf{e}_2 + B_3\mathbf{e}_3)$$

$$= \mathbf{e}_1(A_2B_3 - A_3B_2) + \mathbf{e}_2(A_3B_1 - A_1B_3) + \mathbf{e}_3(A_1B_2 - A_2B_1)$$

elde edilir. Bu ifadeye Christoffel sembollerini ekleyerek

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{e}_1(\varepsilon_{123}A_2B_3 + \varepsilon_{132}A_3B_2) + \mathbf{e}_2(\varepsilon_{231}A_3B_1 + \varepsilon_{213}A_1B_3)$$

$$+\mathbf{e}_3(\varepsilon_{312}A_1B_2 + \varepsilon_{321}A_2B_1) \qquad (1.35)$$

biçiminde yazmak mümkündür. (1.35) eşitliğinin sağ tarafında parantez içindeki birinci terim, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ işleminden elde edilen sonuç vektörün birinci bileşenidir. Benzer şekilde ikinci ve üçüncü terimler de sırasıyla ikinci ve üçüncü bileşenlerdir. 1, 2, 3 indislerinden i, j, k indislerine geçersek tüm terimleri

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \varepsilon_{ijk}A_jB_k \qquad (1.36)$$

tek bir ifade şeklinde yazmak mümkündür. Böylece vektör çarpımı indisler yardımıyla tek terime indirgenmiştir. Burada unutulmaması gereken $i = 1,2,3$, $j = 1,2,3$, $k = 1,2,3$ değerlerini alabileceği, dolayısıyla 3.3.3 = 27 tane sembol olduğudur. Hangi terimlerin sıfırdan farklı olacağını Christoffel sembollerine bırakın. Örneğin, $i = 1$ alınmış ise $j \neq 1$, $k \neq 1$ olmak durumundadır. Çünkü iki indis aynı ise $\varepsilon_{ijk} = 0$ olur. Ayrıca j ve k

indisleri de aynı olursa yine $\varepsilon_{ijk} = 0$ olacağından geriye iki seçenek kalıyor. $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$ veya $i = 1$, $j = 3$, $k = 2$ olması durumu. Sonuç

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_1 = \varepsilon_{123} A_2 B_3 + \varepsilon_{132} A_3 B_2$$

şeklindedir. $\varepsilon_{123} = 1$ ve $\varepsilon_{132} = -1$ olduğu hatırlanırsa birinci bileşen

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2$$

olur.

Örnek 1.7 $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{e}_1 + B_2\mathbf{e}_2 + B_3\mathbf{e}_3$ ve $\mathbf{C} = C_1\mathbf{e}_1 + C_2\mathbf{e}_2 + C_3\mathbf{e}_3$ veriliyor. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ çarpımını indirgeyin.

Çözüm 1.7

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = A_i (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_j \delta_{ij}$$

$j = i$ için $\delta_{ij} = 1$ ve diğer durumlar için $\delta_{ij} = 0$ olduğu hatırlanır ve $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ için (1.36) kullanılırsa

$$= A_i (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_i = A_i (\varepsilon_{ijk} B_j C_k) = \varepsilon_{ijk} A_i B_j C_k$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \varepsilon_{ijk} A_i B_j C_k \tag{1.37}$$

elde edilir.■

Acaba $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ üçlü vektör çarpımı için durum nedir? Üçlü vektör çarpım sonucunun bir vektör olduğunu biliyoruz. Çarpımın ilk aşamasında $\mathbf{D} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ olarak alırsak, sonuç vektörün i bileşeni için

$$[\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]_i = [\mathbf{A} \times \mathbf{D}]_i = \varepsilon_{ijk} A_j D_k$$

$D_k = (\mathbf{B} \times \mathbf{C})_k = \varepsilon_{klm} B_l C_m$ yerine yazılırsa

$$[\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]_i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} A_j B_l C_m \tag{1.38}$$

bulunur. Çarpımı sonuçlandırmak için $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}$ işleminin açılımını bilmek gerekir. Bu aşamada üç boyutlu uzayda Kronecker Delta ve Levi-Civita için bazı özellikleri vermek yararlı olacaktır:

$$i.\ \delta_{ii} = 3 \tag{1.39a}$$

$$ii.\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \tag{1.39b}$$

$$iii.\ \delta_{ij}\varepsilon_{ijk} = 0 \tag{1.39c}$$

$$iv.\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il} \tag{1.39d}$$

$$v.\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6. \tag{1.39e}$$

(1.38)'i indirgemek için (1.39b) özelliğini kullanabiliriz. Ancak ε_{klm} yerine ε_{lmk} yazmak gerekir. ε_{lmk} çift permütasyonla elde edildiğinden ε_{klm} ile aynıdır. Buna göre

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]_i &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}A_jB_lB_m = (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})A_jB_lC_m \\ &= \delta_{il}\delta_{jm}A_jB_lC_m - \delta_{im}\delta_{jl}A_jB_lC_m\end{aligned}$$

yazılabilir. Birinci terimde $l=i$ ve $m=j$ olmadıkça, ikinci terimde ise $m=i$ ve $l=j$ olmadıkça sonuç sıfırdır. Bu göre, birinci terim için $l\rightarrow i$ ve $m\rightarrow j$, ikinci terimde ise $m\rightarrow i$ ve $l\rightarrow j$ indis değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]_i &= A_jB_iC_j - A_jB_jC_i \\ &= A_jC_jB_i - A_jB_jC_i\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Aynı indisleri taşıyan A_jC_j ve A_jB_j skaler çarpımdan gelmiş olmalı. Dolayısıyla $A_jC_j=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})$ ve $A_jB_j=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ yazılabilir. Böylece

$$[\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]_i = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})B_i - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})C_i$$

i bileşeni için elde edilen bu özdeşlikten genele geçebiliriz. $B_i\rightarrow\mathbf{B}$ ve $C_i\rightarrow\mathbf{C}$ yazılırsa

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C} \qquad (1.40)$$

işlem tamamlanmış olur. Böylece üçlü vektör çarpımı, skaler çarpım içeren iki tane terime indirgenmiş oldu.

Örnek 1.8 $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ işlemini iki yolla yapın.

Çözüm 1.8 *Birinci yol:* $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{C}$ diyelim. Bu durumda yapılması istenen işlem $\mathbf{C}\cdot\mathbf{C}=C_iC_i$ skaler çarpımına özdeştir. Diğer yandan $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_i=C_i=\varepsilon_{ijk}A_jB_k$ ifadesi kullanılırsa

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\varepsilon_{ijk}A_jB_k)(\varepsilon_{ilm}A_lB_m) = (\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl})A_jA_lB_kB_m$$

$$=\delta_{jl}\delta_{km}A_jA_lB_kB_m - \delta_{jm}\delta_{kl}A_jA_lB_kB_m$$

$$=A_jA_jB_kB_k - A_jB_jA_kB_k = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = A^2B^2-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2 \qquad (1.41)$$

bulunur.

İkinci yol: (1.10)'da verilen $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=ABSin\theta$ ifadesini kullanalım.

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})^2 = (ABSin\,\theta)^2 = A^2B^2Sin^2\theta$$

$$= A^2B^2(1-Cos^2\theta) = A^2B^2 - A^2B^2Cos^2\theta = A^2B^2 - (ABCos\theta)^2$$

olur. (1.6)'da verilen $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=ABCos\theta$ kullanılırsa

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = A^2B^2 - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2$$

bulunur. Bu (1.41) ile verilen sonuçla aynıdır.

Örnek 1.9 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ olduğunu gösterin.

Çözüm 1.9

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\varepsilon_{ijk} A_j B_k)(\varepsilon_{ilm} C_l D_m) = (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) A_j B_k C_l D_m$$

$$= \delta_{jl}\delta_{km} A_j B_k C_l D_m - \delta_{jm}\delta_{kl} A_j B_k C_l D_m = A_j B_k C_j D_k - A_j B_k C_k D_j$$

$$= (A_j C_j)(B_k D_k) - (A_j D_j)(B_k C_k)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \qquad (1.42)$$

bulunur.

Örnek 1.10 Üç boyutlu uzayda $\delta_{ii} = 3$ olduğunu gösterin.

Çözüm 1.10 $i = 1, 2, 3$ değerlerini alır. Buna göre

$$\delta_{ii} = \sum_{i=1}^{3} \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3$$

bulunur. Toplama sembolü yazılmasa bile orada bir toplam olduğu düşünülmelidir.

Örnek 1.11 Üç boyutlu uzayda $\varepsilon_{ijk}\ \varepsilon_{ijk} = 6$ olduğunu gösterin.

Çözüm 1.11 (1.39b) yardımı ile $\varepsilon_{ijk}\ \varepsilon_{ijk} = \delta_{jj}\ \delta_{kk} - \delta_{jk}\delta_{kj}$ yazılabilir. $\delta_{jk}\delta_{kj} = \delta_{jj}$ olduğundan

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = \delta_{jj}\delta_{kk} - \delta_{jj} = \sum \delta_{jj} \sum \delta_{kk} - \sum \delta_{jj} = 3 \times 3 - 3 = 6$$

bulunur.

Örnek 1.12 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D})]\mathbf{C} - [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]\mathbf{D}$ olduğunu gösterin.

Çözüm 1.12 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{F}$ olsun. $\mathbf{F} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ ifadesini göz önüne alalım. Üçlü vektör çarpımı (1.40) ile verilmişti. Buna göre

$$\mathbf{F} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{D})\mathbf{C} - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{C})\mathbf{D}$$

ifadesi yazılabilir. Şimdi **F**'yi yerine yazalım.

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = [(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{D}]\mathbf{C} - [(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}]\mathbf{D}$$

olur. Skaler çarpımın değişme özelliği nedeniyle eşitliğin sağ tarafında köşeli parantez içindeki çarpanların yeri değiştirilirse

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = [\mathbf{D} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]\mathbf{C} - [\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]\mathbf{D}$$

ifadesi elde edilir. Son olarak (1.28a) yardımıyla $\mathbf{D}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{D})$ ve $\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ yazılırsa

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = [\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{D})]\mathbf{C} - [\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})]\mathbf{D} \qquad (1.43)$$

özdeşliği elde edilir.■

BÖLÜM SONU PROBLEMLERİ

1.1 $\mathbf{A} = 2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ ve $\mathbf{B} = 5\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$ vektörleri veriliyor.
a) $\mathbf{A}+\mathbf{B} =?$
b) $\mathbf{A}-\mathbf{B} =?$
c) **A** ile **B** vektörleri arasındaki dar açıyı bulun.
d) **A** ve **B** vektörlerinin oluşturduğu düzlemin normalini bulun.

1.2 $\mathbf{A} = \mathbf{i}$, $\mathbf{B} = \mathbf{j}$ ve $\mathbf{C} = \mathbf{k}$ vektörleri veriliyor.
a) $\mathbf{D} = \mathbf{A}+\mathbf{B}$ ve $\mathbf{E} = \mathbf{A}+\mathbf{C}$ vektörlerini bulun.
b) **A, B, C, D** ve **E** vektörlerini $+x$, $+y$, $+z$ bölgesinde bulunan ve bir köşesi orijinde olan birim küp üzerinde gösterin.
c) **D** ve **E** vektörleri yönündeki $\mathbf{e}_d$ ve $\mathbf{e}_e$ birim vektörleri elde edin.
d) **D** ve **E** vektörleri arasındaki açıyı bulun.
e) **D** ve **E** vektörlerinin oluşturduğu düzlem kaç birimdir?
f) **D** ve **E** vektörlerinin oluşturduğu düzlemin normalini elde edin?
g) $\mathbf{F} = \mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}$ olmak üzere $\mathbf{D}\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{E})$ ve $\mathbf{D}\times(\mathbf{F}\times\mathbf{E})$ işlemlerini yapın.

1.3 $\mathbf{A} = \mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{j}+\mathbf{k}$ ve $\mathbf{C} = \mathbf{i}-\mathbf{k}$ vektörlerini kullanarak $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ olduğunu gösterin.

1.4 $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = A^2 - B^2$ olduğunu ispatlayın.

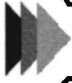
1.5 $\mathbf{A} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i}+m\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ vektörlerinin dik olabilmesi için m sayısı ne olmalıdır?

1.6 **A, B, C** ve **D** vektörleri aynı düzlemde iseler $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = \mathbf{0}$ olduğunu gösterin.

1.7 Bir parçacığın konum ve hız vektörleri zamanın fonksiyonu olarak sırasıyla $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + (t^2-2t)\mathbf{k}$, $\mathbf{v}(t) = 3t^2\mathbf{i} - 2t\,\mathbf{j} + (2t-2)\mathbf{k}$ şeklinde veriliyor. **v** hız vektörünün xy düzlemine paralel olduğu anda konum vektörünü bulun.

1.8 m kütleli bir cisim $\mathbf{F} = 6\mathbf{i}+8\mathbf{j}$ N'luk bir kuvvetin etkisiyle xy düzleminde $\mathbf{d} = 4\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ m yer değiştiriyor. Kuvvetin yaptığı işi $W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{d}$ çarpımından yararlanarak hesaplayın.

1.9 $Q = 5.0 \times 10^{-19}\ C$ yükü taşıyan bir cisim $\mathbf{v} = 10^6\mathbf{j}\ m/s$ hızıyla hem $\mathbf{E} = 10^6\mathbf{i}\ N/C$ ile verilen bir elektrik alanın, hem de $\mathbf{B} = 1\mathbf{k}\ T$ ile verilen bir manyetik alanın bulunduğu bir noktaya giriyor. O anda, yüklü cisme etkiyen Lorentz kuvvetini $\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ yardımı ile hesaplayın.

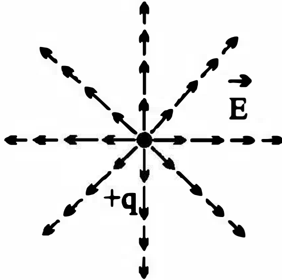


BÖLÜM 2 BİR ALANIN TÜREVİ ve VEKTÖR İNTEGRAL

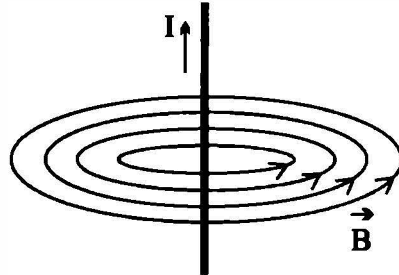
Bu bölümde, skaler ve vektörel alanların türevleri ile çizgi, yüzey ve hacim integralleri verildikten sonra, temel integral teoremler incelenecektir.

2.1 Skaler ve Vektör Alanlar

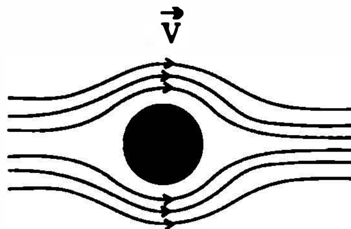
Genel olarak konumun ve zamanın fonksiyonu olan çok değişkenli iki çeşit alan tanımlanabilir. Biri, $f(\mathbf{r},t) = f(x,y,z,t)$ yön içermeyen fakat konumun ve zamanın değişmesiyle değeri değişebilen skaler alan iken, diğeri $\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}(x,y,z,t)$ şiddeti ve yönü, konuma ve zamana göre değişebilen vektör alandır. Sabitler ve sabit vektörler sırasıyla skaler ve vektör alanların özel bir durumu olarak düşünülebilir. Bazı vektörel alanlar Şekil 2.1a,b,c'de verilmiştir. Çok değişkenli fonksiyonların bağlı olduğu değişkenlerden herhangi birine göre türevi, kısmi türev olarak bilinir. Kısmi türev, bağımsız değişkenlerinden biri hariç diğerleri sabitken fonksiyonun tek değişkene göre değişimini verir. Değişkenler x_k şeklinde indislenirse, kısmi türev $\frac{\partial}{\partial x_k}$ biçiminde yazılır.



Şekil 2.1a Noktsal bir yükün **E** alanı



Şekil 2.1b Akım taşıyan bir telin **B** alanı



Şekil 2.1c Bir akışkanın bir engel etrafındaki **v** alanı

2.2 Skaler ve Vektör Alanların Zamana Göre Türevi

Katezyen koordinatlarda $\mathbf{A}(x,y,z,t) = A_x(x,y,z,t)\mathbf{i} + A_y(x,y,z,t)\mathbf{j} + A_z(x,y,z,t)\mathbf{k}$ vektör ve $f(x,y,z,t)$ skaler alanlarını göz önüne alalım. Skaler alanın zamana göre kısmi türevi biçimsel olarak

$$\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial t} \tag{2.1}$$

şeklinde yazılırken, vektör alanın türevi ise

$$\frac{\partial \mathbf{A}(x,y,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial A_x(x,y,z,t)\mathbf{i}}{\partial t} + \frac{\partial A_y(x,y,z,t)\mathbf{j}}{\partial t} + \frac{\partial A_z(x,y,z,t)\mathbf{k}}{\partial t} \tag{2.2}$$

biçimindedir. Burada $A_x(x,y,z,t)$, $A_y(x,y,z,t)$ ve $A_z(x,y,z,t)$ vektör alanın bileşenleridir. Bir vektörün türevi alınırken, her bir bileşenin türevinin ilgili birim vektörün yanına yazılması gerekir. $f(x,y,z,t)$ ve $\mathbf{A}(x,y,z,t)$ açıkça verilirse türevler alınabilir.

Örnek 2.1 $+x$ yönünde ilerleyen bir düzlem dalga $\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$ ile tanımlanır. Burada A, k, i ve ω sabitlerdir. Zamana göre kısmi türevi bulun. $\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = ?$

Çözüm 2.1 İstenen kısmi türev

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial\left[Ae^{i(kx-\omega t)}\right]}{\partial t} = -i\omega Ae^{i(kx-\omega t)} = -i\omega\psi(x,t)$$

bulunur.

Örnek 2.2 Bir vektör alanı $\mathbf{F}(x,y,z,t) = F_0 Cos(\omega t)[x\mathbf{i}+ y\mathbf{j}+z\mathbf{k}]$ olarak verilmektedir. Burada F_0 ve ω sabitlerdir. $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = ?$

Çözüm 2.2 Zamana göre kısmi türev alınırsa

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} F_0 Cos(\omega t)[x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}] = -\omega F_0 Sin(\omega t)[x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}]$$

bulunur.■

Türev Özellikleri

f skaler, $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ vektör alanlar olmak üzere aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$i.\ \frac{\partial(\mathbf{A}+\mathbf{B})}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2.3}$$

$$ii.\ \frac{\partial(f\mathbf{A})}{\partial t} = \mathbf{A}\frac{\partial f}{\partial t} + f\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{2.4}$$

$$iii.\ \frac{\partial(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2.5}$$

$$iv.\ \frac{\partial(\mathbf{A}\times\mathbf{B})}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2.6}$$

2.3 Del İşlemcisinin Skaler ve Vektör Alanlara Etkisi

Bu kesimde, bir skaler veya vektör alanın konuma göre türevini alan ancak vektör gibi işlev gören bir işlemciyi tanımlayarak başlayalım. Del yada Nabla olarak isimlendirilen ve ∇ sembolü ile gösterilen bu işlemcinin kartezyen koordinatlardaki ifadesi

$$\vec{\nabla} = \boldsymbol{\nabla} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.7}$$

biçimindedir. (2.7)'den görüldüğü gibi $\boldsymbol{\nabla}$ işlemcisi hem kısmi türevi hem de **i**, **j**, **k** birim vektörlerini içermektedir. Yani; $\boldsymbol{\nabla}$ işlemcisi bir vektör diferansiyel işlemcidir. $\boldsymbol{\nabla}$ işlemcisi skaler veya vektörel bir alana etki ederek üç ayrı sonuç üretir. Her bir sonucun fiziksel yorumu farklıdır.

2.3.1 Gradyan

Birincisi, $\boldsymbol{\nabla}$ işlemcisinin bir $f(x, y, z)$ skaler alana etkisiyle tanımlanan gradyandır. Bu

$$grad(f) = \boldsymbol{\nabla} f = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z} \tag{2.8}$$

biçimindedir. Gradyan işlemi sonucunda bileşenleri $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ olan bir vektör alanı elde edilir. f fonksiyonu, elektrostatik veya kütle çekim potansiyeli olabileceği gibi, bir ortamın sıcaklık dağılımını veren bir fonksiyon, hatta bir yamacın geometrik yapısını tanımlayan bir yüzey fonksiyonu da olabilir. Eğer f potansiyel ise $grad(f)$ bir işaret farkı ile kuvveti verir:

$$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} f$$

Eğer f bir yamacın yüzey fonksiyonu ise, gradyan belli bir $P(x_0, y_0, z_0)$ noktasından hangi doğrultuda gidilirse sarplığının en fazla değişeceğini belirler. Bunun gibi, göz önüne alınan fonksiyona göre gradyanı farklı biçimlerde yorumlamak mümkündür.

Örnek 2.3 Yay sabiti k olan bir yayın doğal boyu x_0 olsun. Bu yayın boyu $\Delta x = x - x_0$ kadar gerilirse, yayda depolanan potansiyel enerji $V(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$ ile verilir. Yayda oluşan kuvveti bulun.

Çözüm 2.3 Gradyan işlemlemi yapılırsa

$$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} V(x) = -\frac{d}{dx}[\frac{1}{2}k(x - x_0)^2\mathbf{i}] = -k(x - x_0)\mathbf{i}$$

bulunur.

Örnek 2.4 $\mathbf{r}$ yer vektörünün büyüklüğününe bağlı bir $f(r)$ skaler alanın gradyanı hesaplayın.

Çözüm 2.4 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ şeklindeki yer vektörü büyüklüğünün

$$r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ile verildiğini biliyoruz. $r(x, y, z)$ ifadesi r'nin x, y ve z'nin fonksiyonu olduğunu gösteriyor. Gradyanı yazıp türev için zincir kuralı uygulanırsa

$$\nabla f = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z} = \mathbf{i}\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial z} \tag{2.9}$$

elde edilir. Şimdi $\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}$ ile verilen birinci bileşeni hesaplayalım.

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{\partial x} &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}2x \\ &= \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{x}{r}\end{aligned}$$

olduğundan birinci bileşen $\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{df(r)}{dr}$ olur. Benzer şekilde ikinci ve üçüncü bileşenler için işlem yapılırsa $\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{df(r)}{dr}$ ve $\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}\frac{df(r)}{dr}$ elde edilir. Elde edilenler (2.9)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{x\mathbf{i}}{r}\frac{df(r)}{dr} + \frac{y\mathbf{j}}{r}\frac{df(r)}{dr} + \frac{z\mathbf{k}}{r}\frac{df(r)}{dr} \\ &= \frac{(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{r}\frac{df(r)}{dr} = \frac{\mathbf{r}}{r}\frac{df(r)}{dr} = \widehat{r}\,\frac{df(r)}{dr}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $\widehat{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}$, yer vektörü yönündeki birim vektördür.■

$f(x, y, z)$ skaler alanının $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ noktası ile ondan sonsuz küçük $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ kadar uzaktaki $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$ noktalarında aldığı değerler sırasıyla $f(\mathbf{r})$, $f(\mathbf{r}+d\mathbf{r})$ olsun. f'deki sonsuz küçük değişim

$$df = f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}+d\mathbf{r}) = f(x, y, z) - f(x + dx, y + dy, z + dz) \tag{2.10}$$

biçimindedir. Diğer yandan zincir kuralı kullanılarak $f(x, y, z)$'in diferansiyeli

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \tag{2.11}$$

olarak yazılabilir. (2.10) ve (2.11)'in sol tarafları eşit olduğuna göre, sağ tarafları eşit olmalıdır. Bu durumda

$$df = f(x, y, z) - f(x + dx, y + dy, z + dz) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \tag{2.12}$$

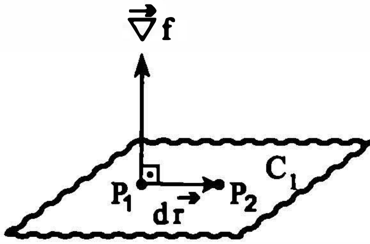
elde edilir. $\nabla f \cdot d\mathbf{r}$ skaler çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} \nabla f \cdot d\mathbf{r} &= \left(\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot(dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}+dz\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \end{aligned} \tag{2.13}$$

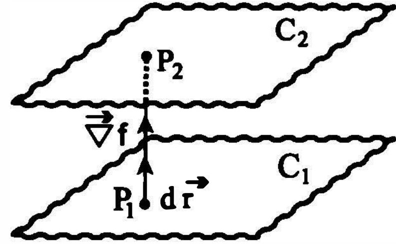
olur. (2.12) ve (2.13) karşılaştırıldığında

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r} \tag{2.14}$$

olduğu anlaşılır. (2.14)'ten yararlanarak bazı sonuçlar çıkarmak mümkündür:



Şekil 2.2a Düzlemde gradyan vektörü



Şekil 2.2b İki eşpotansiyel yüzey

i. Şekil 2.2a'da verilen $f(x, y, z) = C_1$, yüzeyini ele alalım. Bu yüzeyde iki nokta P_1 ve P_2 olsun. Öyleki P_2, P_1'den $d\mathbf{r}$ kadar ötede olsun. $f(x, y, z) = C_1$ yüzeyindeki keyfi tüm noktalar için f'nin alacağı değer C_1 olacağından $f(P_1) = f(P_2)$ olur. Dolayısıyla P_1'den P_2'ye gidildiğinde fark $df = f(P_2) - f(P_1) = 0$ olur. Bu göre

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r} = 0$$

olur. Bu da $\nabla f \perp d\mathbf{r}$ olduğunu gösterir. $d\mathbf{r}$, $f(x, y, z) = C_1$ yüzeyinin içinde kaldığından, ∇f göz önüne alınan noktada yüzey normali yönündedir.

ii. Bu kez Şekil 2.2b'de verilen, $f(x, y, z) = C_1$ ve $f(x, y, z) = C_2$ olan ardışık iki yüzeyi göz önüne alalım. P_1 noktası $f(x, y, z) = C_1$ yüzeyinde, P_2 ise $f(x, y, z) = C_2$ yüzeyinde olsun.

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r} = |\nabla f||d\mathbf{r}|Cos\theta \tag{2.15}$$

ile verilen df maksimum değerini $Cos\theta = 1$, yani $\theta = 0$ iken alır. Öyleyse P_1'den P_2'ye ∇f yönünde gidilirse, $df = f(P_2) - f(P_1) = C_2 - C_1$ farkı maksimum olur.

Örnek 2.5 Şekil 2.3 'deki gibi $x^2 + y^2 + z = 9$ ile verilen dairesel paraboloid'in yüzeyinde $P(1, 2, 4)$ noktasında **a)** Yüzey normalini **b)** Teğet düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm 2.5a) $P(1,2,4)$ noktası $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z = 9$ yüzey denklemini sağladığından yani $1^2 + 2^2 + 4 = 9$ olduğundan, paraboloidin yüzeyinde bir noktadır. Bu noktada yüzey normalinin ∇f yönünde olduğunu biliyoruz. Öyleyse ∇f'nin P noktasındaki değerini bulmalıyız.

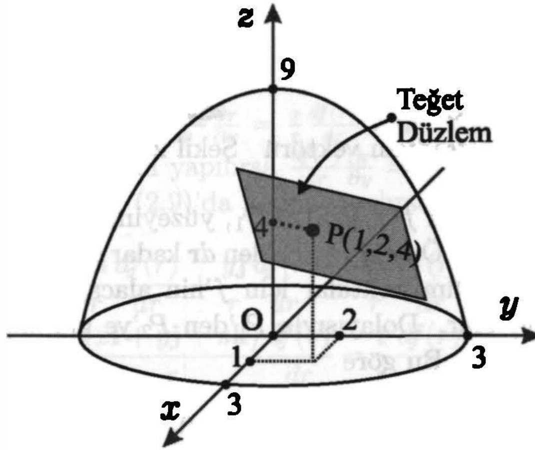
$$\nabla f = \mathbf{i}\frac{\partial(x^2+y^2+z)}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial(x^2+y^2+z)}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial(x^2+y^2+z)}{\partial z}$$

$$\nabla f|_P = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}|_{P(1,2,4)} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

olur. Yüzey normalini bulmak için ∇f'yi $|\nabla f|$'ye bölmeliyiz. $|\nabla f| = \sqrt{2^2+4^2+1} = \sqrt{21}$ olduğundan P noktasındaki yüzey normali $\widehat{n}$

$$\widehat{n} = \mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{21}}$$

olarak bulunur.



Şekil 2.3 $P(1,2,4)$ noktasında paraboloid'e teğet düzlem

b) Teğet düzlemin içinde bulunan, $P(1,2,4)$ ve $Q(x,y,z)$noktalarından geçen **d** doğrusu

$$\mathbf{d} = (x-x_0)\mathbf{i} + (y-y_0)\mathbf{j} + (z-z_0)\mathbf{k} = (x-1)\mathbf{i} + (y-2)\mathbf{j} + (z-4)\mathbf{k}$$

ile verilir. Teğet düzlemin içindeki **d** doğrusu P noktasında ∇f vektörüne dik olacağından, teğet düzlemin denklemi

$$\nabla f \cdot \mathbf{d} = 0$$

ile belirlenebilir. Gerekli işlemler yapılırsa, teğet düzlemin denklemi

$$\nabla f \cdot \mathbf{d} = (2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+\mathbf{k}) \cdot [(x-1)\mathbf{i}+(y-2)\mathbf{j}+(z-4)\mathbf{k}] = 0$$

$$2(x-1) + 4(y-2) + 1(z-4) = 0$$

$$2x + 4y + z - 14 = 0$$

olarak bulunur.

Örnek 2.6 Uzayın belli bir bölgesindeki sıcaklık dağılımı

$$T(x,y,z) = 130 - x^2 - y^2 - z^2$$

ile veriliyor. $P(1,1,1)$ noktasında hangi doğrultuda gidilirse sıcaklık değişimi maksimum olur?

Çözüm 2.6 $\nabla f\big|_P = -2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}\big|_{P(1,1,1)} = -2(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$.■

2.3.2 Diverjans

∇ işlemcisinin bir skaler alana etkisinden sonra, bir vektör alana etkisine geçebiliriz. ∇ işlemcisi bir vektör diferansiyel işlemci olduğundan, kendinden sonra gelen bir vektör "$\cdot$" veya "$\times$" çarpımlarından biriyle yazılabilir. İlkin $\nabla \cdot \mathbf{A}$ ile tanımlanan diverjans işlemine bakalım:

$\mathbf{A}(x,y,z) = A_x(x,y,z)\mathbf{i} + A_y(x,y,z)\mathbf{j} + A_z(x,y,z)\mathbf{k}$ şeklindeki bir vektör alanın diverjansı

$$div\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}) \cdot [A_x(x,y,z)\mathbf{i} + A_y(x,y,z)\mathbf{j} + A_z(x,y,z)\mathbf{k}]$$

$$div\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial z} \qquad (2.16)$$

biçimindedir. Bir vektör alanın diverjansı, skaler bir alandır. Ancak özel olarak sabit bir vektörün diverjansı sıfırdır. Uzayın bir noktasında bir vektörün diverjansı göz önüne alınan noktada vektör alanı oluşturan bir kaynağın olup olmadığını belirler. Pozitif, negatif veya sıfır değerlerinden birini alabilir. Sıkışabilir akışkan örneği klasik hale gelmiştir. Uzayın bir noktasında birim zamanda birim yüzeyden çıkan akışkan miktarı $\rho\mathbf{v}$ ile verilir. Burada $\rho(x,y,z)$, akışkanın (x,y,z) noktasındaki yoğunluğu, $\mathbf{v}$ ise hızıdır. $\nabla \cdot (\rho\mathbf{v})$; (x,y,z) noktasında birim zamanda ve birim hacim başına $dxdydz$ hacim elemanı içinden çıkan net akışkan miktarıdır. Genel olarak akışkanın yoğunluğu zamanın da fonksiyonudur. $\rho(x,y,z,t)$ için süreklilik denklemini yazmak yararlı olacaktır:

$$\frac{\partial \rho(x,y,z,t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0 \qquad (2.17)$$

Süreklilik denkleminin bazı sonuçları şöyle verilebilir:

i. Eğer akışkanın yoğunluğu yani birim hacim başına akışkan miktarı zamanla değişiyorsa , onu değiştiren bir kaynak vardır. Bu kaynak pozitif veya negatif olabilir.

ii. Eğer akışkanın yoğunluğu zamanla değişmiyorsa yani sabit ise, $\frac{\partial\rho}{\partial t}=$ 0'dır. Buna özdeş olarak $\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})=0$ olur.

Fizikte sıklıkla karşılaştığımız vektör alanlar sadece akışkan için yazılan $\rho\mathbf{v}$ alanından ibaret değildir. Elektrostatik alan $\mathbf{E}$, kütle çekim alanı $\mathbf{g}$ ve manyetik alan $\mathbf{B}$ bunlardan bazılarıdır. Bu alanları oluşturan kaynaklar sırasıyla elektriksel yük, kütle ve elektrik akımıdır. Pozitif noktasal bir yükü göz önüne alalım(Şekil 2.1a). Elektrik alan çizgileri yükün olduğu noktadan dışarıya doğru tasvir edilir. Bu durumda pozitif nokta yükün oluşturduğu elektrik alanın diverjansı $\nabla\cdot\mathbf{E}>0$'dır. Negatif noktasal bir yük için durum bunun tersidir. Elektrik alan çizgileri noktasal yüke doğru gelip yükte sonlanırlar. Bu nedenle $\nabla\cdot\mathbf{E}<0$'dır. Manyetik alan $\mathbf{B}$'nin diverjansının $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ olduğunu belirtelim. Manyetik alan çizgileri kapalı bir eğri oluşturur(Şekil 2.1b). Dolayısıyla manyetik alan çizgilerinin nerede başlayıp ıraksadığı belirlenemez. Elektrik alan için süreklilik denklemi

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{E}=0 \qquad (2.18)$$

biçimindedir. Burada ρ elektriksel yük yoğunluğudur. Diğer yandan statik elektrik alanın diverjansı ile yük yoğunluğu arasında

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (2.19)$$

bağıntısı vardır. Burada ε_0 boş uzayın elektrik alan geçirgenliğidir. Kuantum mekaniğinde süreklilik denklemi

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{J}=0 \qquad (2.20)$$

şeklinde yazılır. ψ sistemin durumunu belirleyen dalga fonksiyonu olmak üzere, $\rho=\psi^*\psi$ ile verilen olasılık yoğunluğu iken, $\mathbf{J}$ akı yoğunluğu adını alır.

Örnek 2.7 $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ yer vektörünün diverjansını hesaplayın ve yorumlayın.

Çözüm 2.7 Diverjans işlemi yapılırsa

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{r} &= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\\ &= \frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=1+1+1=3\end{aligned}$$

bulunur. Üç boyutlu uzayda yer vektörü 3 bileşene sahiptir. Bu bileşenler orijinden yani $(0,0,0)$ noktasından çıkmakta ve biri $+x$, diğeri $+y$, sonuncusu da $+z$ yönünde uzaklaşmaktadır.

Örnek 2.8 $\mathbf{A}(x,y,z) = (5x+4y^2)\mathbf{i} + (xy^2+z)\mathbf{j} + (1-z^2+x^3)\mathbf{k}$ vektör alanının diverjansını hesaplayarak $P(1,1,-1)$ noktasındaki değerini bulunuz.

Çözüm 2.8 $\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial(5x+4y^2)}{\partial x} + \frac{\partial(xy^2+z)}{\partial y} + \frac{\partial(1-z^2+x^3)}{\partial z} = 5+2xy-2z$
$\nabla\cdot\mathbf{A}\big|_{P(1,1,-1)} = 5+2.1.1-2(-1) = 9$ bulunur.

Örnek 2.9 $\mathbf{r}$ yer vektörü ve $f(r)$ ise r'nin fonksiyonu bir skaler alan olmak üzere $\nabla\cdot[\mathbf{r}\ f(r)] = ?$

Çözüm 2.9 $\mathbf{r}\ f(r) = \mathbf{i}xf(r) + \mathbf{j}yf(r) + \mathbf{k}zf(r)$ olduğundan

$$\nabla\cdot[\mathbf{r}f(r)] = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot[\mathbf{i}xf(r) + \mathbf{j}yf(r) + \mathbf{k}zf(r)]$$

$$= \frac{\partial[xf(r)]}{\partial x} + \frac{\partial[yf(r)]}{\partial y} + \frac{\partial[zf(r)]}{\partial z}$$

$$= f(r)\frac{\partial x}{\partial x} + x\frac{\partial f(r)}{\partial x} + f(r)\frac{\partial y}{\partial y} + y\frac{\partial f(r)}{\partial y} + f(r)\frac{\partial z}{\partial z} + z\frac{\partial f(r)}{\partial z}$$

$$= f(r)\left[\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right] + \left[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right]f(r)$$

olur. $\left[\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right] = 3$ ve $\left[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right] = \mathbf{r}\cdot\nabla$ olduğundan

$$\nabla\cdot[\mathbf{r}f(r)] = 3f(r) + \mathbf{r}\cdot\nabla f(r)$$

elde edilir. Son olarak Örnek 2.4'te elde edilmiş olan $\nabla f(r) = \hat{r}\frac{df(r)}{dr}$ eşitliği kullanılırsa

$$\nabla\cdot[\mathbf{r}f(r)] = 3f(r) + \mathbf{r}\cdot\hat{r}\frac{df(r)}{dr} = 3f(r) + r\frac{df(r)}{dr}$$

elde edilir.

Örnek 2.10 Uzayın sonlu bir bölgesindeki bir yük dağılımının oluşturduğu elektrik alan $\mathbf{E}(x,y,z) = A(xy\mathbf{i} + \frac{1}{2}x^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k})$ ile verilmektedir. Burada A uygun birimli bir sabittir. Yük yoğunluğunu bulun. $\rho = ?$

Çözüm 2.10 Diverjans yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\rho = \varepsilon_0(\nabla\cdot\mathbf{E}) = \varepsilon_0 A\left(\frac{\partial(xy)}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{1}{2}x^2)}{\partial y} + \frac{\partial(z^2)}{\partial z}\right) = A\varepsilon_0(y+2z)$$

bulunur.■

2.3.3 Rotasyonel

Artık sıra $\nabla \times \mathbf{A}$ ile tanımlanan rotasyonel işlemine gelmiş bulunuyor. $\mathbf{A}(x,y,z) = A_x(x,y,z)\mathbf{i} + A_y(x,y,z)\mathbf{j} + A_z(x,y,z)\mathbf{k}$ şeklindeki bir vektör alanını göz önüne alalım. $\mathbf{A}$ vektörünün rotasyoneli

$$rot\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x(x,y,z) & A_y(x,y,z) & A_z(x,y,z) \end{vmatrix} \tag{2.21}$$

olarak yazılabilir. Gerekli işlemler yapılırsa

$$rot\mathbf{A} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \tag{2.22}$$

olur. Bu işlem iki vektörün vektörel çarpımına benzemekle birlikte $\nabla \times \mathbf{A} \neq -\mathbf{A} \times \nabla$ olduğunu belirtmek gerekir. Bir vektör alanın rotasyoneli sıfır değilse sonuç yine bir vektör alandır. Özel olarak sabit bir vektörün rotasyoneli sıfırdır.

Örnek 2.11 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ yer vektörünün rotasyonelini hesaplayın.
Çözüm 2.11 $\mathbf{r}$ vektörü (2.21) ile verilen rotasyonel ifadesinde yerine konur ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} rot\mathbf{r} &= \nabla \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right) = 0 \end{aligned}$$

bulunur.■

Yukarıdaki örnekten görüldüğü gibi yer vektörünün rotasyoneli sıfırdır. $\mathbf{E}$ elektrostatik alanın da rotasyoneli $\nabla \times \mathbf{E}$ =0'dır. O zaman şöyle bir soru sorarak konuyu açıklığa kavuşturmaya çalışalım: Açıkça verilmediği halde bir vektör alanın rotasyonelinin sıfır olup olmayacağını nasıl öngörebiliz? Akım taşıyan bir telin etrafında oluşan manyetik alan çizgilerinin kapalı eğriler oluşturduklarını biliyoruz. Bu burgusal özellik girdaplı akan bir akarsuda da görülür. Girdaplı suya bırakılan bir pervane dönmeye başlar. Elektrik motorlarında dönme manyetik alanla sağlanır. Bu misallerden şöyle bir tahminde bulunabiliriz. Eğer bir vektör alanın çizgileri kapalı bir eğri oluşturuyorsa yani selenoidal yapısı varsa, rotasyoneli sıfırdan farklı olacaktır. Örneğin, manyetik alanın rotasyoneli sıfırdan farklıdır, yani $\nabla \times \mathbf{B} \neq 0$ olur.

Örnek 2.12 Bir $\mathbf{F}(x,y,z) = e^x y\mathbf{i} + (e^x + 2y)\mathbf{j}$ vektör alanı veriliyor. Bu vektör alanı selenoidal midir?

Çözüm 2.12 Verilen vektör alanın bileşenleri $F_x = e^x y$, $F_y = e^x + 2y$, $F_z = 0$'dır. Buna göre

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{F} &= \mathbf{i}\left[\frac{\partial(0)}{\partial y}-\frac{\partial(e^x+2y)}{\partial z}\right]+\mathbf{j}\left[\frac{\partial(e^x y)}{\partial z}-\frac{\partial(0)}{\partial x}\right]\\ &\quad+\mathbf{k}\left[\frac{\partial(e^x+2y)}{\partial x}-\frac{\partial(e^x y)}{\partial y}\right]\\ &= \mathbf{i}(0-0)+\mathbf{j}(0-0)+\mathbf{k}(e^x-e^x)=0\end{aligned}$$

bulunur. $\nabla\times\mathbf{F}=0$ olduğundan $\mathbf{F}$ vektör alanı selenoidal değildir.

∇ İçeren Çarpımların Özellikleri:

A ve **B** vektör alanlar, f ise bir skaler alan olmak üzere aşağıdaki özdeşlikler yazılabilir:

$$\begin{aligned} i.\ \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) &= (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}\\ &\quad+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})+\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) \end{aligned}\tag{2.23}$$

$$ii.\ \nabla\cdot(f\mathbf{A})=(\nabla f)\cdot\mathbf{A}+f(\nabla\cdot\mathbf{A})\tag{2.24}$$

$$iii.\ \nabla\times(f\mathbf{A})=f(\nabla\times\mathbf{A})+(\nabla f)\times\mathbf{A}\tag{2.25}$$

$$iv.\ \nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})\tag{2.26}$$

$$v.\ \nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}-\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})\tag{2.27}$$

Örnek 2.13 Üç boyutlu uzayda $\mathbf{A}=A_1\mathbf{e}_1+A_2\mathbf{e}_2+A_3\mathbf{e}_3$ ve $\mathbf{B}=B_1\mathbf{e}_1+B_2\mathbf{e}_2+B_3\mathbf{e}_3$ vektör alanları veriliyor. $[\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})]_i$ işlemini yapınız.

Çözüm 2.13 Kısmi türevi $\frac{\partial}{\partial x_i}=\partial_i, i=1,2,3$ biçiminde indislerle gösterirsek, gradyan işlemcisi $\nabla=\mathbf{e}_1\partial_1+\mathbf{e}_2\partial_2+\mathbf{e}_3\partial_3$ olarak yazılabilir. $\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})$ işleminin sonucu bir vektör olacağından, sonuç vektörün i. bileşeni

$$[\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})]_i=\varepsilon_{ijk}A_j(\nabla\times\mathbf{B})_k$$

olarak yazılabilir. Burada i,j,k birim vektör olmayıp indislerdir. Diğer yandan eşitliğin sağ tarafında parantez içindeki ifade

$$(\nabla\times\mathbf{B})_k=\varepsilon_{klm}\partial_l B_m$$

olarak yazılabileceğinden

$$[\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})]_i=\varepsilon_{ijk}A_j\varepsilon_{klm}\partial_l B_m=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}A_j\partial_l B_m=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}A_j\partial_l B_m$$

olur. (1.39b) ile verilen $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}=\delta_{il}\,\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$ özelliği kullanılırsa

$$[\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})]_i=(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})A_j\partial_l B_m=\delta_{il}\delta_{jm}A_j\partial_l B_m-\delta_{im}\delta_{jl}A_j\partial_l B_m$$

$$[\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})]_i = A_j\partial_i B_j - A_j\partial_j B_i = A_j\partial_i B_j - (\mathbf{A}\cdot\nabla)B_i \qquad (2.28)$$

olarak elde edilir.

Örnek 2.14 (2.23) ile verilen özdeşliği elde edin.
Çözüm 2.14 (2.28) ile verilen özdeşliği tekrar göz önüne alalım:

$$[\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})]_i = A_j\partial_i B_j - (\mathbf{A}\cdot\nabla)B_i$$

$\mathbf{A} \leftrightarrows \mathbf{B}$ değişimi yapılırsa

$$[\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_i = B_j\partial_i A_j - (\mathbf{B}\cdot\nabla)A_i$$

elde edililir. Bu iki özdeşlik taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}[\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})]_i + [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_i &= (A_j\partial_i B_j + B_j\partial_i A_j) \\ &\quad -(\mathbf{A}\cdot\nabla)B_i - (\mathbf{B}\cdot\nabla)A_i\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. $A_j\partial_i B_j + B_j\partial_i A_j = \partial_i(B_jA_j) = \partial_i(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ olduğundan i. bileşen için

$$[\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})]_i + [\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_i = \partial_i(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) - (\mathbf{A}\cdot\nabla)B_i - (\mathbf{B}\cdot\nabla)A_i$$

ifadesi bulunur. i. bileşen için olan bu sonuç genellenirse

$$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} - (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}$$

bulunur. $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ terimi yalnız bırakılırsa

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

bulunur.

Örnek 2.15 (2.27) özdeşliğini ispatlayın.
Çözüm 2.15 $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ işleminin i. bileşeni ile başlayalım.

$$[\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\partial_j A_l B_m$$

$$= \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmk}\partial_j A_l B_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j A_l B_m$$

$$[\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]_i = \partial_j A_i B_j - \partial_j A_j B_i$$

elde edilir. $\partial_j A_i B_j$ ve $\partial_j A_j B_i$ terimleri için çarpımın türevi uygulanır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\partial_j A_i B_j = A_i\partial_j B_j + B_j\partial_j A_i = A_i(\nabla\cdot\mathbf{B}) + (\mathbf{B}\cdot\nabla)A_i$$

$$\partial_j A_j B_i = A_j\partial_j B_i + B_i\partial_j A_j = (\mathbf{A}\cdot\nabla)B_i + B_i(\nabla\cdot\mathbf{A})$$

elde edilir. Bu ifadeler yerine yazılırsa, *i.* bileşen için

$$[\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]_i = A_i(\nabla \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)A_i - (\mathbf{A} \cdot \nabla)B_i - B_i(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

bulunur. Şimdi genellenirse

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 2.16 $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_1\omega_1 + \mathbf{e}_2\omega_2 + \mathbf{e}_3\omega_3$ sabit bir açısal hız vektörü olmak üzere, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ tanımını kullanarak $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{v})$ olduğunu gösterin. Burada $\mathbf{v}$ çizisel hızdır.

Çözüm 2.16 (2.27) özdeşliğinde $\mathbf{A} \to \boldsymbol{\omega}$ ve $\mathbf{B} \to \mathbf{r}$ yazılırsa

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{r}) + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{r} - \mathbf{r}(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega})$$

$\boldsymbol{\omega} =$ *sabit* olduğundan $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ ve $(\mathbf{r} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} = 0$ olur. Geriye kalan $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{r}$ ve $\boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{r})$ terimlerini hesaplayalım.

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{r} = (\omega_1\partial_1 + \omega_2\partial_2 + \omega_3\partial_3)(\mathbf{e}_1x_1 + \mathbf{e}_2x_2 + \mathbf{e}_3x_3)$$

$$= \mathbf{e}_1\omega_1\partial_1x_1 + \mathbf{e}_2\omega_2\partial_2x_2 + \mathbf{e}_3\omega_3\partial_3x_3$$

olarak yazılabilir. Burada $i \neq j$ için $\partial_i x_j = 0$ kullanıldı. $\partial_1x_1 = \partial_2x_2 = \partial_3x_3 = 1$ olduğundan

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{r} = \mathbf{e}_1\omega_1 + \mathbf{e}_2\omega_2 + \mathbf{e}_3\omega_3 = \boldsymbol{\omega}$$

bulunur. r'nin diverjansı $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ olduğundan $\boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{r}) = 3\boldsymbol{\omega}$ olur. Sonuç olarak

$$\nabla \times \mathbf{v} = 3\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\omega} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{v})$$

elde edilir.■

2.3.4 İkinci Türevler

f skaler, $\mathbf{A}$ vektör alan olmak üzere ∇ işlemcisini iki kez kullanarak beş ardışık türev tanımlamak mümkündür.

$$i.\ divgrad(f) = \nabla \cdot (\nabla f) \quad (2.29)$$

$$ii.\ rotgrad(f) = \nabla \times (\nabla f) \quad (2.30)$$

$$iii.\ graddiv\ \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (2.31)$$

$$iv.\ divrot\mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (2.32)$$

$$v.\ rotrot\mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \tag{2.33}$$

(2.30) ve (2.32) ile verilen türevler daima sıfırdır. (2.29) ile verilen ifade kartezyen koordinatlarda

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla^2 f$$

biçiminde olur ve f'nin Laplasiyeni denir. ∇^2 Laplace işlemcisi

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.34}$$

şeklindedir. Kartezyen koordinatlarda (2.31) ifadesi

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \nabla \left[\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k})\right]$$

$$= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{i}\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z}\right)$$

$$+\mathbf{j}\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right) \tag{2.35}$$

biçimindedir. Sonuç bir vektör alandır. Benzer işlemleri (2.33) için de yapmak mümkündür. Burada da sonuç yine bir vektör alanıdır.

Örnek 2.17 (2.30) ile verilen ifadesinin sıfır olduğunu gösteriniz.

Çözüm 2.17 Kartezyen koordinatlarda keyfi bir skaler $f(x, y, z)$ alanı için

$$\nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$+\mathbf{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

biçimindedir. Burada $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}$ ve $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$ olduğundan

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

bulunur. f keyfi olduğundan sonuç daima doğrudur.

Örnek 2.18 (2.32) ile verilen ifadesinin sıfır olduğunu gösteriniz.

Çözüm 2.18 Bu ispat için indisli Nabla işlemcisi $\nabla = \mathbf{e}_1\partial_1+\mathbf{e}_2\partial_2+\mathbf{e}_3\partial_3$ ve $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$ vektör alanını kullanalım.

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) =& \partial_i(\nabla\times\mathbf{A})_i = \partial_i\varepsilon_{ijk}\partial_j B_k = \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j B_k \\ =& \varepsilon_{123}\partial_1\partial_2 B_3 + \varepsilon_{132}\partial_1\partial_3 B_2 + \varepsilon_{231}\partial_2\partial_3 B_1 \\ &+\varepsilon_{213}\partial_2\partial_1 B_3 + \varepsilon_{312}\partial_3\partial_1 B_2 + \varepsilon_{321}\partial_3\partial_2 B_1\end{aligned}$$

$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$ ve $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1$ olduğundan

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) =& \partial_1\partial_2 B_3 - \partial_1\partial_3 B_2 + \partial_2\partial_3 B_1 - \partial_2\partial_1 B_3 + \partial_3\partial_1 B_2 - \partial_3\partial_2 B_1 \\ =& (\partial_2\partial_3 - \partial_3\partial_2)B_1 + (\partial_3\partial_1 - \partial_1\partial_3)B_2 + (\partial_1\partial_2 - \partial_2\partial_1)B_3\end{aligned}$$

bulunur. Ardışık türevler için $\partial_2\partial_3 = \partial_3\partial_2$, $\partial_3\partial_1 = \partial_1\partial_3$ ve $\partial_1\partial_2 = \partial_2\partial_1$ olduğundan

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0$$

bulunur. **A** vektör alanı keyfi olduğundan sonuç daima doğrudur.■

2.4 Vektör İntegral

Türevden sonra integrale başlayabiliriz. Vektör integral deyimi ile her hangi bir vektörel nicelik içeren integral kastedilmektedir. Vektör integrali çizgi, yüzey ve hacim integrali olarak üç kısımda incelemek uygundur. İlk olarak çizgi veya diğer adıyla eğrisel integral ile başlayalım.

2.4.1 Çizgi İntegrali

Kartezyen koordinatlarda sonsuz küçük yer değiştirme $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ olmak üzere, bir C eğrisi boyunca üç çeşit çizgi integrali tanımlanabilir. $f(x, y, z)$ skaler, $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}$ vektör alanı olmak üzere bunlar;

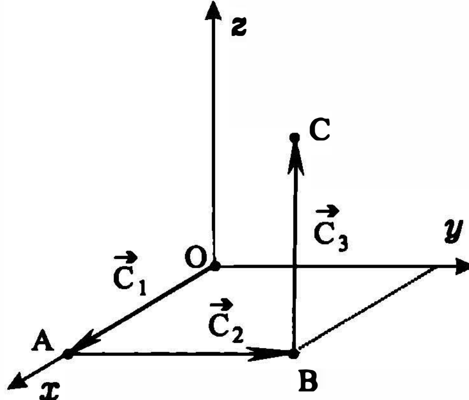
$$i.\quad \int_C f d\mathbf{r} = \mathbf{i}\int_C f\, dx + \mathbf{j}\int_C f\, dy + \mathbf{k}\int_C f\, dz \tag{2.36}$$

$$ii.\quad \int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C A_x dx + \int_C A_y dy + \int_C A_z dz \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}iii.\quad \int_C \mathbf{A}\times d\mathbf{r} =& \mathbf{i}\int_C (A_y dz - A_z dy) + \mathbf{j}\int_C (A_z dx - A_x dz) \\ &+\mathbf{k}\int_C (A_x dy - A_y dx)\end{aligned} \tag{2.38}$$

şeklindedir.

Örnek 2.19 Bir $f(x,y,z) = 12xy^2z^3$ skaler alanı veriliyor. Şekil 2.4'te verilen $O(0,0,0)$ noktasından başlayarak önce $A(1,0,0)$ noktasına sonra oradan $B(1,1,0)$ noktasına ve oradan da $C(1,1,1)$ noktasına giden doğrular boyunca $\int_C f d\mathbf{r}$ çizgi integralini hesaplayın.



Şekil 2.4 Üç parçalı eğri

Çözüm 2.19 C eğrisi $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1+\mathbf{C}_2+\mathbf{C}_3$ şeklinde üç vektörün birleşiminden oluşuyor. Bu nedenle eğrisel integral $\int_C f d\mathbf{r} = \int_{C_1} f d\mathbf{r} + \int_{C_2} f d\mathbf{r} + \int_{C_3} f d\mathbf{r}$ şeklinde yazılabilir. Sonuç bu üç integralin toplamı olacaktır. Her bir eğri boyunca integralleri hesaplayalım.

C_1 yolu: $O(0,0,0) \to A(1,0,0)$ boyunca $y = 0$ ve $z = 0$'dır. x ise $0 \leq x \leq 1$ aralığında değişmektedir. $dy = dz = 0$ olacağından $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i}$ olur. Böylece;

$$\int_{C_1} f d\mathbf{r} = \mathbf{i}\int_{C_1} f dx = \mathbf{i}\int_O^A 12xy^2z^3 dx = \mathbf{i}6x^2y^2z^3\Big|_{0,0,0}^{1,0,0} = 0 \text{ bulunur.}$$

C_2 yolu: $A(1,0,0) \to B(1,1,0)$ boyunca $x = 1$ ve $z = 0$'dır. y ise $0 \leq y \leq 1$ aralığında değişmektedir. $dx = dz = 0$ olacağından $d\mathbf{r} = dy\mathbf{j}$ olur. Böylece;

$$\int_{C_2} f d\mathbf{r} = \mathbf{j}\int_{C2} f dy = \mathbf{j}\int_A^B 12xy^2z^3 dy = \mathbf{j}4xy^3z^3\Big|_{1,0,0}^{1,1,0} = 0 \text{ bulunur. Son olarak,}$$

C_3 yolu: $B(1,1,0) \to C(1,1,1)$ boyunca $x = 1$ ve $y = 1$'dir. z ise $0 \leq z \leq 1$ aralığında değişmektedir. $dx = dy = 0$ olacağından $d\mathbf{r} = dz\mathbf{k}$ olur. Böylece;

$$\int_{C_1} f d\mathbf{r} = \mathbf{k}\int_{C_1} f dz = \mathbf{k}\int_B^C 12xy^2z^3 dz = \mathbf{k}3x^2y^2z^4\Big|_{1,1,0}^{1,1,1} = 3\mathbf{k} \text{ bulunur.}$$

Örnek 2.20 Bir $\mathbf{F}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ kuvvet alanının etkisiyle bir cisim $y = x^2$ eğrisi boyunca $A(0,0)$ noktasından $B(1,1)$ noktasına hareket ediyor. Yapılan işi hesaplayın.

Çözüm 2.20 Değişen bir kuvvetin yaptığı iş $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ şeklinde tanımlanır.

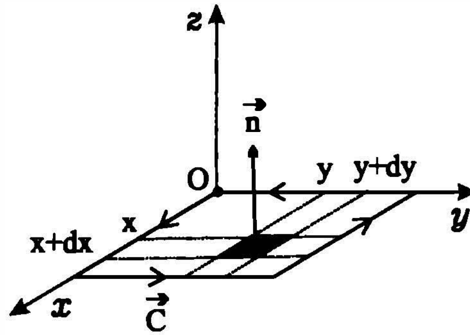
$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = \int xdx + ydy$

$y = x^2$, $dy = 2xdx$ yazılırsa

$W = \int\limits_{x=0}^{1} (x + 2x^3)dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2}\Big|_0^1 = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) - (0) = 1$ bulunur.■

2.4.2 Yüzey İntegrali

Üç boyutlu uzayda herhangi bir $P(x, y, z)$ noktasında $\phi(x, y, z) = 0$ biçimindeki denklemle tanımlanan geometri bir yüzey tanımlar. Örneğin kartezyen koordinat sisteminde bir kübün yüzeyleri $x = sabit$, $y = sabit$ veya $z = sabit$ biçiminde tanımlanırlar. $z = sabit$ yüzeyi üzerinde x'teki sonsuz küçük değişim dx ve y'deki sonsuz küçük değişim dy olmak üzere, yüzey elemanı $da = dxdy$ biçiminde oluşturulur. Yüzey elemanı vektörü $d\mathbf{a} = da\mathbf{n}$ olarak tanımlanır(Şekil 2.5).



Şekil 2.5 Yüzey vektörü elemanı

Burada $\mathbf{n}$ yüzey normali vektörüdür. Yönü, sağ elin dört parmağı basit kapalı yüzeyin sınırını dolanacak şekilde konulduğunda baş parmak yönündedir. S yüzey olmak üzere üç çeşit yüzey integrali tanımlanabilir:

$$i. \int\limits_S f d\mathbf{a} = \mathbf{n} \int\limits_S f da \tag{2.39}$$

$$ii. \int\limits_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} \tag{2.40}$$

$$iii. \int\limits_S \mathbf{A} \times d\mathbf{a}. \tag{2.41}$$

S yüzeyi, f ve A alanları verilirse bu iki katlı integraller hesaplanabilir.

2.4.3 Hacim İntegrali

Kartzyen koordinatlarda hacim elemanı $dV = dxdydz$ biçiminde skaler bir büyüklüktür. Bu nedenle f skaler alanının hacim integrali vektörel büyüklük içermez ve vektör integral kapsamında değerlendirilemez. Vektör integral olarak, sadece bir $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}$ vektör alanın bir V hacim bölgesinde integrali tanımlanabilir.

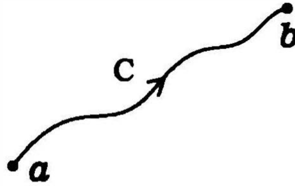
$$\int_V \mathbf{A}dV = \mathbf{i}\int_V A_x(x,y,z)dV + \mathbf{j}\int_V A_y(x,y,z)dV + \mathbf{k}\int_V A_z(x,y,z)dV \quad (2.42)$$

$\mathbf{A}(x,y,z)$ vektör alanı ve V hacim bölgesi açıkça verilirse bu üç katlı integral hesaplanabilir.

2.5 Temel İntegral Teoremleri

Bu kesimde, fizikte sık kullanılan bazı temel teoremlerin integral biçimlerini vereceğiz. Gradyan için temel teoremle başlayalım.

2.5.1 Temel Gradyan Teoremi



Şekil 2.6 Uç noktaları a ve b olan C eğrisi

Bu teorem basitçe şöyledir: Bir $f(x,y,z)$ skaler alanın gradyanının bir C eğrisi boyunca integrali, eğrinin uç noktalarında f'nin aldığı değerler farkına eşittir. Bu teoremi elde etmek için (2.14) ile verilen $df = \nabla f \cdot d\mathbf{r}$ eşitliğini göz önüne alalım. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$\int_a^b df = \int_a^b \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

ifadesi elde edilir. Şekil 2.6'dan görülebileceği gibi a ve b, C eğrisinin uç noktalarıdır. $\int_a^b df = f(b) - f(a)$ olduğundan bu eşitlik

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \nabla f \cdot d\mathbf{r} \quad (2.43)$$

biçimini alır. (2.43) ile verilen eşitlik "*temel gradyan teoremi*" olarak bilinir. f elektrostatikte, elektriksel potansiyel V'ye karşılık gelirken $\nabla V = -\mathbf{E}$ elektrik alan vektörünü tanımlar. Bu durumda gradyan teoremi

$$\Delta V = V(b) - V(a) = -\int_a^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} \tag{2.44}$$

şeklindedir. Buna göre b ve a noktaları arasındaki elektriksel potansiyel farkını bulmak için $-\mathbf{E}$'nin çizgi integralini almak gerekir. Potansiyel hesaplamaya yarayan bu teorem için "*potansiyel teori*" denmesi bundandır. Elektrostatikte, elektrik alan korunumlu olduğundan yani $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ olduğundan çizgi integrali, çizginin şeklinden bağımsızdır.

Örnek 2.21 Uzayın bir bölgesinde bir yük dağılımının elektrik alanı $\mathbf{E}(x, y, z) = A(xy\mathbf{i} + \frac{1}{2}x^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k})$ olarak veriliyor. Burada A uygun birimli bir sabittir.

a) $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ olduğunu gösterin.

b) $O(0,0,0)$ noktası ile $C(x,y,z)$ noktası arasındaki potansiyel farkını hesaplayın.

Çözüm 2.21a)

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Axy & \frac{A}{2}x^2 & Az^2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(0-0) + \mathbf{j}(0-0) + \mathbf{k}A(x-x) = 0$$

b) Elektriksel potansiyeli iki yolla bulabiliriz.

Birinci Yol: Elektrik alanın çizgi integrali eğrinin biçiminden bağımsızdır. Bu nedenle hesap kolay olsun diye $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3$ eğrisi, Şekil 2.4'tekine benzer $\mathbf{C}_1$: $O(0,0,0) \to A(x,0,0)$, $\mathbf{C}_2$: $A(x,0,0) \to B(x,y,0)$ ve $\mathbf{C}_3$: $B(x,y,0) \to C(x,y,z)$ şeklinde seçilirse

$$\Delta V = V(b) - V(a) = -\int_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{C_1} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} - \int_{C_3} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$

yazılabilir. $\mathbf{C}_1$ eğrisi boyunca $y = z = 0$, $dy = dz = 0$, $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i}$ ve $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = E_x dx$ olduğundan

$$\int_{C_1} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^x E_x dx = \int_0^x Axy dx = 0$$

bulunur. $\mathbf{C}_2$ eğrisi boyunca $x = \textit{sabit}$, $z = 0$, $dx = dz = 0$, $d\mathbf{r} = dy\mathbf{j}$ ve $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = E_y dy$ olduğundan

$$\int_{C_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^y E_y dy = \int_0^y \frac{A}{2}x^2 dy = \frac{A}{2}x^2 \int_0^y dy = \frac{A}{2}x^2 y$$

bulunur. Son olarak $\mathbf{C}_3$ eğrisi boyunca $x = sabit$, $y = sabit$, $dx = dy = 0$, $d\mathbf{r} = dz\mathbf{k}$ ve $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = E_z dz$ olduğundan

$$\int_{C_3} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^z E_z dz = \int_0^z Az^2 dz = A\int_0^z z^2 dz = \frac{A}{3}z^3$$

bulunur. Böylece

$$\Delta V = V(C) - V(O) = -A\left(\frac{x^2 y}{2} + \frac{z^3}{3}\right)$$

olarak bulunur. $V(O) = V(0,0,0) = 0$ olduğundan, $V(x,y,z)$ için

$$\Delta V = V(C) = V(x,y,x) = -A\left(\frac{x^2 y}{2} + \frac{z^3}{3}\right)$$

bulunur.

İkinci Yol: $\nabla V = -\mathbf{E}$ vektör eşitliğini açıkça yazalım:

$$\nabla V = \mathbf{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial V}{\partial z} = -Axy\mathbf{i} - \frac{A}{2}x^2\mathbf{j} - Az^2\mathbf{k}.$$

Bu eşitliğin sağlanması için sol taraftaki her bir vektör bileşeninin sağ taraftaki aynı adlı bileşene eşit olmasıyla mümkün olur. Buna göre

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -Axy \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{A}{2}x^2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -Az^2 \quad (3)$$

şeklinde üç tane diferansiyel denklem elde edilir. Birinci denklemi ele alalım.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -Axy \Rightarrow \int dV = -\int Axydx \Rightarrow V(x,y,z) = -A\frac{x^2 y}{2} + g(y,z)$$

elde edilir. Burada $g(y,z)$, x'e bağlı olmayan dolayısıyla x'e göre türevi sıfır olan keyfi bir fonksiyondur. Şimdi bunun y'ye göre türevini alıp ikinci denklemde yerine yazalım.

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -A\frac{x^2}{2} + \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$$

$$-A\frac{x^2}{2}+\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=-\frac{A}{2}x^2 \Rightarrow \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=0$$

bulunur. Bu denklem çözülürse $g(x,y)$

$$g(x,y)=sabit+h(z)$$

elde edilir. Burada $h(z)$, y'ye göre kısmi türevi 0 olan z'ye bağlı bir fonksiyondur. Bu aşamaya kadar

$$V(x,y,z)=-A\frac{x^2y}{2}+sabit+h(z)$$

bulundu. Son olarak z'ye göre kısmi türevi alınıp üçüncü denklemde yerine yazılırsa

$$\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{dh(z)}{dz}$$

$$\frac{dh(z)}{dz}=-Az^2 \Rightarrow h(z)=-\int Az^2dz=-A\frac{z^3}{3}$$

bulunur. Sonuç olarak potansiyel için $V(x,y,z)=-A\left(\frac{x^2y}{2}+\frac{z^3}{3}\right)+sabit$ bulunur. Orijinde potansiyeli sıfır olarak seçersek, $sabit=0$ olur. Bu durumda

$$V(x,y,z)=-A\left(\frac{x^2y}{2}+\frac{z^3}{3}\right)$$

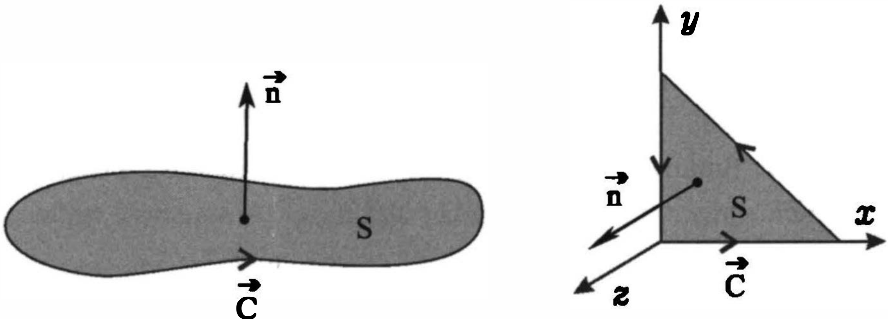
olarak bulunur.■

2.5.2 Stokes Teoremi

S açık bir yüzey, C bu yüzeyi çevreleyen basit kapalı bir eğri olsun. $\mathbf{A}(x,y,z)$, S yüzeyi ve C sınırında sürekli bir vektör alanı olmak üzere, Stokes teoremi

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=\iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{a} \tag{2.45}$$

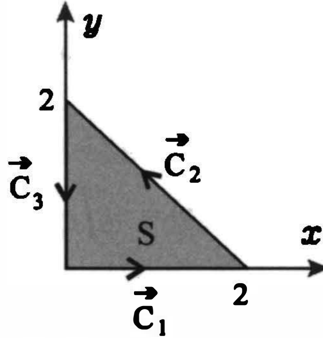
şeklindedir. Bu teoreme göre bir $\mathbf{A}$ vektör alanın rotasyonelinin yüzey integrali, kendisinin çizgi integraline eşittir. Bu teorem, S yüzeyinde ve C sınırında sürekli ve türevlenebilir tüm vektör alanları için geçerlidir.



Şekil 2.7 Basit kapalı yüzeyler

Şekil 2.7'de görüldüğü gibi yüzey elemanı vektörünün yönü ile kapalı eğriyi dolanma yönü arasında, sağ el kuralı ile tanımlanan bir ilişki vardır. Sağ elin dört parmağı dolanma yönünü gösterecek şekilde katlanırken, baş parmak yüzey normalinin yönünü belirler.

Örnek 2.22 $\mathbf{A}(x,y) = xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ vektör alanı için Şekil 2.8'de verilen yüzeyi ve sınırını kullanarak Stokes teoremini doğrulayın.



Şekil 2.8 Üçgen yüzey

Çözüm 2.22 (2.45) ile verilen Stokes teoreminin önce $\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ ile verilen sol tarafını ele alalım. Kapalı **C** eğrisi $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3$ gibi üç parçadan oluşmaktadır.

$\mathbf{C}_1$ eğrisi boyunca $y = 0$, $dy = 0$, $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i}$ ve $\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = xydx$ olduğundan

$$\int_{C_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{x=0}^{2} xydx = 0$$

bulunur. $\mathbf{C}_2$ eğrisi, $y = 2 - x$ doğrusudur. Bu durumda hem x hem de y değişmektedir. Bu nedenle $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$'dir. $\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = xydx + y^2dy$ olduğundan

$$\int_{C_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int xydx + y^2dy$$

biçimini alır. Burada $y = 2 - x$ ve $dy = -dx$ yazarak sadece x'e bağlı hesap yapabiliriz.

$$\int_{C_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{x=2}^{0} x(2-x)dx + (2-x)^2(-dx) = \int_{2}^{0} (-2x^2 + 6x - 4)dx$$

$$\int_{C_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x\right]_2^0 = 0 - (-\frac{4}{3}) = \frac{4}{3}$$

bulunur. Burada x'in sınırlarının eğrinin yönüne göre alındığına dikkat edilmelidir. C_3 eğrisi boyunca $x = 0$, $dx = 0$, $d\mathbf{r} = dy\mathbf{j}$ ve $\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = y^2dy$ olduğundan

$$\int_{C_3} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{y=2}^{0} y^2 dy = \left.\frac{y^3}{3}\right|_2^0 = 0 - \frac{8}{3} = -\frac{8}{3}$$

bulunur. Sonuç olarak sol taraf

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_3} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 0 + \frac{4}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{4}{3}$$

olarak elde edilir. Şimdi teoremin sağ tarafını ele alalım. $\nabla\times\mathbf{A}$ hesaplanırsa

$$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & y^2 & 0 \end{vmatrix} = -x\mathbf{k}$$

bulunur. $d\mathbf{a} = dxdy\mathbf{k}$ olacağından

$$\iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{a} = -\int\int x\mathbf{k}\cdot dxdy\mathbf{k} = -\int\int xdxdy$$

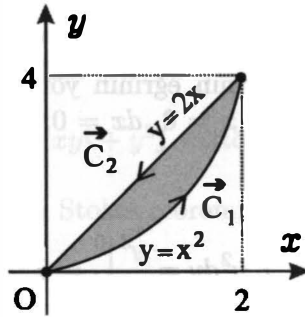
$$= -\int_{x=0}^{2} xdx \int_{y=0}^{y=2-x} dy = -\int_{x=0}^{2} xdx \left[y\Big|_0^{2-x}\right] = -\int_{x=0}^{2}(2-x)xdx$$

$$\iint_S (\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{a} = \int_{x=0}^{2}(x^2-2x)dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2\right|_0^2 = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$$

elde edilir. Teoremin iki tarafı eşit çıktığından ispat tamamlanmış oldu.

Örnek 2.23 $\mathbf{G}(x,y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ vektör alanını ve Şekil 2.9'da verilen $y = 2x$ ile $y = x^2$ eğrilerinin oluşturduğu ara kesit bölgesi için Stokes

teoremini doğrulayın.



Şekil 2.9 Parabol ve doğrunun arakesiti

Çözüm 2.23 Stokes teoreminin önce sol tarafına bakalım. Kapalı **C** eğrisi, $y = x^2$ parabolu ve $y = 2x$ doğrusundan oluşmaktadır. Bu iki eğri $x = 0$ ve $x = 2$ noktalarında kesişirler. $\mathbf{C_1}$ eğrisi boyunca $y = x^2$, $dy = 2xdx$, $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}$ ve $\mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = -ydx + xdy$ olduğundan

$$\int_{C_1} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \int -ydx + xdy = \int -(x^2)dx + x(2xdx)$$

$$= \int_{x=0}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

bulunur. $\mathbf{C_2}$ eğrisi boyunca $y = 2x$, $dy = 2dx$, $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}$ ve $\mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = -ydx + xdy$ olacağından

$$\int_{C_2} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \int -ydx + xdy = \int_{x=2}^{0} 2\,(x - x)\,dx = 0$$

bulunur. Böylece sol taraf

$$\oint_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \frac{8}{3}$$

olarak hesaplanır. Artık teoremin sağ tarafını ele alabilir ve $\int_S \int (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{a}$ yüzey integralini hesaplayabiliriz. $\nabla \times \mathbf{G}$ hesaplanırsa

$$\nabla \times \mathbf{G} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + (1 - (-1))\mathbf{k} = 2\mathbf{k}$$

bulunur. $d\mathbf{a} = dxdy\mathbf{k}$ olduğundan

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{a} = \int\int 2\mathbf{k} \cdot dxdy\mathbf{k} = 2\int\int dxdy$$

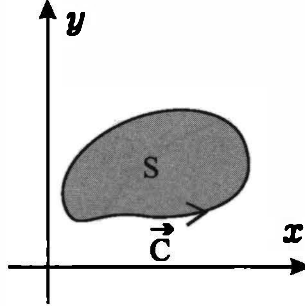
$$= 2\int_{x=0}^{2} dx \int_{y=x^2}^{y=2x} dy = 2\int_{x=0}^{2} dx \left(y|_{x^2}^{2x} \right) = 2\int_{x=0}^{2} (2x - x^2)dx$$

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{a} = 2\left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right)\Big|_0^2 = 2\left(4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak $\oint_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{a} = \frac{8}{3}$ olduğundan teorem ispatlanmış oldu.■

Düzlemde Green Teoremi

Kaynaklarda "*Düzlemde Green Teoremi*" olarak verilen teorem, iki boyutta Stokes teoreminden başka bir şey değildir.



Şekil 2.10 Basit kapalı bir yüzey ve sınırı

Şekil 2.10'daki gibi xy düzleminde bir bölge S ve sınırı C olsun. Bu bölgede ve sınırında tanımlı, sürekli bir vektör alanı $\mathbf{A}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ olarak verilmiş ise (2.45) ile verilen Stokes teoreminin alacağı biçime bakalım. Sol taraf

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C [P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}] \cdot [dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}] = \oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

biçimini alır. Sağ tarafı bulmak için önce $\nabla \times \mathbf{A}$ işlemi yapılırsa

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y) & Q(x, y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right)\mathbf{k}$$

olur. xy düzleminde kapalı eğriyi, saat ibresi tersine giderek oluşturursak $d\mathbf{a} = dxdy\mathbf{k}$ olur. Böylece sağ taraf

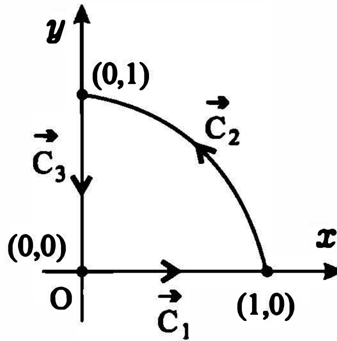
$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \iint_S \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) \mathbf{k} \cdot dxdy\mathbf{k}$$
$$= \iint_S \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy$$

biçimini alacaktır. Sonuç olarak "*Düzlemde Green teoremi*"

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy \qquad (2.46)$$

olarak elde edilmiş olur.

Örnek 2.24 $\oint_C (xy^2 + 1)dx + (x^2 y)dy$ eğrisel integrali **a)** Şekil 2.11'de verilen $x = 0$, $y = 0$ doğruları ve $x^2 + y^2 = 1$ çemberinin oluşturduğu kapalı eğri boyunca saat ibresi tersine dolanarak hesaplayın. **b)** Düzlemde Green teoremi yardımı ile hesaplayın.



Şekil 2.11 Çembersel yüzey ve sınırı

Çözüm 2.24a) Kapalı **C** eğrisi üç parçadan oluşmaktadır. Her bir parça için çizgi integralini hesaplamalıyız. $\mathbf{C_1}$ boyunca yani x ekseni üzerinde $y = 0$, $dy = 0$ dır. Bu durumda

$$\int_{C_1} (xy^2 + 1)dx + (x^2 y)dy = \int_{x=0}^{1} dx = x\Big|_0^1 = 1$$

olur. $\mathbf{C_2}$ eğrisi $x^2 + y^2 = 1$ çember parçasıdır. y'yi x cinsinden $y^2 = 1 - x^2$ olarak yazar ve iki tarafın diferansiyelini alırsak

$$2ydy = -2xdx \Rightarrow dy = -\frac{x}{y}dx$$

bulunur. Böylece

$$\int_{C_2} (xy^2+1)dx + (x^2y)dy = \int_{C_2} \left[x(1-x^2)+1\right]dx + x^2y(-\frac{x}{y}dx)$$

$$\int_{x=1}^{0} (-2x^3+x+1)dx = \left[-\frac{x^4}{2}+\frac{x^2}{2}+x\right]_1^0 = (0) - \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right) = -1$$

olarak hesaplanır. $\mathbf{C_3}$ eğrisi $x=0$ doğrusudur. Bu durumda $dx=0$ olur. Böylece

$$\int_{C_3} (xy^2+1)dx + (x^2y)dy = 0$$

bulunur. Orijinden yola çıkıp tekrar orijine dönerek kapalı eğriyi oluşturduk. Her üç eğri boyunca alınan integralleri toplarsak

$$\oint_C (xy^2+1)dx + (x^2y)dy = 1-1+0 = 0$$

elde edilir.

b) $\oint_C (xy^2+1)dx+(x^2y)dy$ integralini (2.46) ile verilen Düzlemde Green teoreminin sol tarafı olan $\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ ile karşılaştırırsak

$$P(x,y) = xy^2+1 \text{ ve } Q(x,y) = x^2y$$

olduğu anlaşılır. Teoreme göre $\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ ile verilen sol taraf, $\iint_S \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy$ ile verilen sağ tarafa eşittir. Öyleyse biz sağ tarafı hesaplarsak, sol tarafı dolaylı olarak elde etmiş olacağız. Sağ tarafı hesaplamak için $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ ve $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ kısmi türevler alınırsa

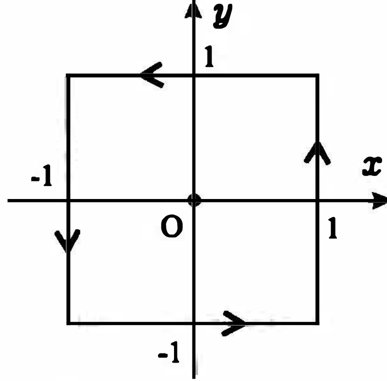
$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(x^2y)}{\partial x} = 2xy \text{ ve } \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(xy^2+1)}{\partial y} = 2xy$$

bulunur. Bu durumda

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)dxdy = \iint_S (2xy-2xy)\,dxdy = 0$$

bulunur. Görüldüğü gibi sonucu kolayca bulabildik.

Örnek 2.25 Bir kuvvet alanı $\mathbf{F}(x,y) = (ye^{xy} - y^2 Sinx)\mathbf{i} + (xe^{xy} + 2yCosx)\mathbf{j}$ olarak veriliyor. Şekil 2.12'de verilen kapalı eğri boyunca kuvvetin yaptığı işi Green Teoremi yardımı ile bulunuz.



Şekil 2.12 Karesel yüzey ve sınırı

Çözüm 2.25 Kapalı **C** eğrisi boyunca değişken bir kuvvetin yaptığı iş $W = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ile hesaplanır. $\mathbf{F}(x,y)$ kuvvet alanı ve $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ yerine yazılırsa

$$W = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint \left[(ye^{xy} - y^2 Sinx)\mathbf{i} + (xe^{xy} + 2yCosx)\mathbf{j}\right] \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j})$$

elde edilir. Skaler çarpım yapılırsa

$$W = \oint (ye^{xy} - y^2 Sinx)dx + (xe^{xy} + 2yCosx)dy$$

bulunur. Bu integral $\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ yapısındadır. Buna göre $P(x,y) = ye^{xy} - y^2 Sinx$ ve $Q(x,y) = xe^{xy} + 2yCosx$'tir. $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ ve $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ kısmi türevleri hesaplanırsa

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(xe^{xy} + 2yCosx)}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} - 2ySinx$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(ye^{xy} - y^2 Sinx)}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy} - 2ySinx$$

elde edilir. $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 0$ olduğundan kapalı C eğrisi boyunca yapılan iş

$$W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

olur.■

2.5.3 Gauss Teoremi

V basit bağlantılı bir hacim bölgesi, S bu hacmi saran kapalı bir yüzey ve $\mathbf{A}(x, y, z)$ göz önüne alınan hacim bölgesinde ve sınırında sürekli bir vektör alanı olmak üzere, Gauss teoremi

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV \tag{2.47}$$

biçimindedir. Eşitliğin sol tarafındaki integralin iki katlı yüzey integrali, sağ tarfındaki integralin ise üç katlı hacim integrali olduğunu belirtelim. Kolaylık olsun diye böyle yazılmıştır. Bu teoreme göre; bir **A** vektör alanın diverjansının hacim integrali, söz konusu vektör alanın, bu hacmi saran kapalı yüzey üzerinden integraline eşittir. Bir vektörün diverjansı bir skaler alan olduğundan sonuç skalerdir. Sol taraf buna uygun olarak "·" çarpımı ile yazılmıştır. Bu teoremin "*diverjans teoremi*" olarak da isimlendirildiğini belirtmekte yarar var. (2.47) eşitliğinin sol tarafı **A** vektör alanının S yüzeyinde geçirdiği akıdır. Genel olarak bir **A** alanı için Φ akısı

$$\Phi = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} \tag{2.48}$$

ile hesaplanır. Gauss teoreminde yüzey kapalı olmak zorundadır. Ancak genel olarak bu zorunluluk yoktur. Fizikte sıklıkla karşılaştığımız iki akı Φ_E elektrik akısı ve Φ_B manyetik akıdır. Bunlar

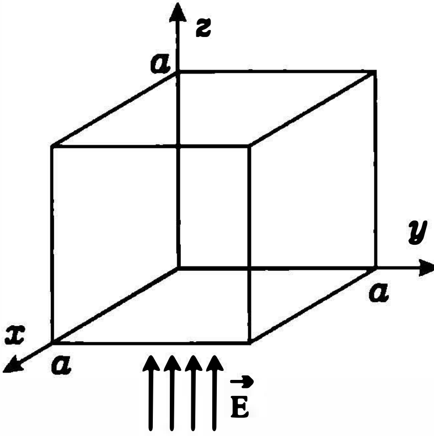
$$\Phi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \tag{2.49}$$

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \tag{2.50}$$

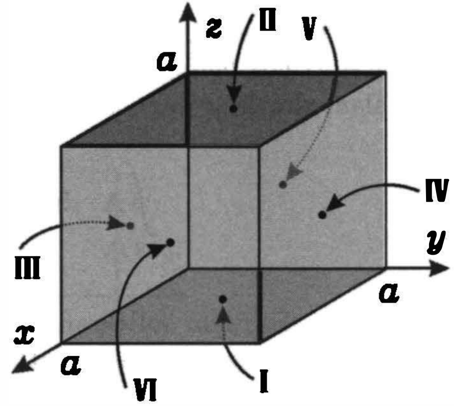
şeklinde yazılır.

Örnek 2.26 $\mathbf{E} = z\mathbf{k}$ ile verilen bir elektrik alanın Şekil 2.13a'daki gibi bir köşesi orijinde bulunan ve kenar uzunluğu a olan küpten geçirdiği Φ_E elektrik akısını **a)** Doğrudan **b)** Gauss teoremi yardımı ile dolaylı olarak

hesaplayın.



Şekil 2.13a Küpten geçen akı



Şekil 2.13b Küpün yüzeyleri

Çözüm 2.26 a) Yüzeyleri Şekil 2.13b'teki gibi numaralayalım ve yüzey elemanlarını yazalım.

I. yüzey: xy düzleminde z eksenini $z = 0$'da kesen yüzey. Bu yüzeyde $z = 0 = sabit$ olduğundan yüzey elemanı dx ve dy'nin çarpımından oluşturulmalıdır. Dışa doğru olan yüzey normali $-\mathbf{k}$ yönünde olur. Yani $d\mathbf{a}_1 = -dxdy\mathbf{k}$ bulunur.

II. yüzey: Bu yüzeyin birinciden farkı, yüzey normalinin $+\mathbf{k}$ yönünde olmasıdır. Buna göre $d\mathbf{a}_2 = dxdy\mathbf{k}$'dır.

III. yüzey: xz düzleminde y eksenini $y = 0$'da kesen yüzey. Bu yüzeyde $y = 0 = sabit$ olduğundan yüzey elemanı dx ve dz'nin çarpımından oluşmalıdır. Dışa doğru olan yüzey normali $-\mathbf{j}$ yönünde olur. Yani $d\mathbf{a}_3 = -dx\, dz\, \mathbf{j}$ bulunur.

IV. yüzey: Bu yüzeyin üçüncüden farkı, yüzey normalinin $+\mathbf{j}$ yönünde olmasıdır: $d\mathbf{a}_4 = dxdz\mathbf{j}$.

V. yüzey: yz düzleminde x eksenini $x = 0$'da kesen yüzey. Bu yüzeyde $x = 0 = sabit$ olduğundan yüzey elemanı dy ve dz'nin çarpımından oluşmalıdır. Dışa doğru olan yüzey normali $-\mathbf{i}$ yönünde olur. Yani $d\mathbf{a}_5 = -dydz\mathbf{i}$ bulunur. Son olarak,

VI. yüzey: Bu yüzeyin normali $+\mathbf{i}$ yönünde olduğundan $d\mathbf{a}_6 = dydz\mathbf{i}$ olarak elde edilir.

Elektrik alanın büyüklüğü z koordinatı ile değişmekte ancak yönü $+\mathbf{k}$ yönünde sabit kalmaktadır. Dolayısıyla $I.$ ve $II.$ yüzeyler hariç diğer yüzeylerde $\mathbf{E}$ alanı $d\mathbf{a}$ yüzey elemanı vektörlerine diktir. Bu nedenle $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}_3 = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}_4 = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}_5 = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}_6 = 0$ olur. $I.$ ve $II.$ yüzeyler için

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_I \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}_1 + \int_{II} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}_2$$

$$= \iint\limits_{I} -zdxdy + \iint\limits_{II} zdxdy$$

elde edilir. Diğer yandan I. yüzeyde $z = 0$, II. yüzeyde $z = a$ olduğu hatırlanırsa Φ_E elektrik akısı

$$\Phi_E = a \int_{x=0}^{a} dx \int_{y=0}^{a} dy = a^3$$

olarak bulunur.

b) Bu kez elektrik akısını (2.47) ile verilen Gauss teoreminin sağ tarafını yani, $\Phi_E = \int\limits_V (\nabla \cdot \mathbf{E})dV$ hacim integralini hesaplayarak bulalım.

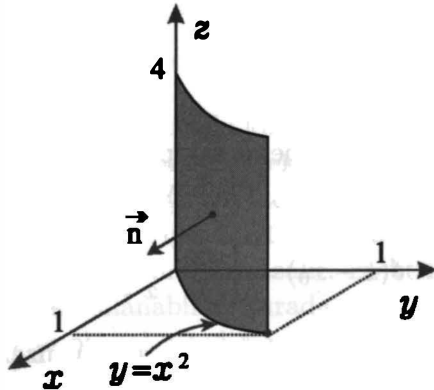
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot z\mathbf{k} = \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

ve hacim elemanı $dV = dxdydz$ olduğundan

$$\Phi_E = \int\limits_V (\nabla \cdot \mathbf{E})dV = \int_{x=0}^{a} dx \int_{y=0}^{a} dy \int_{z=0}^{a} dz = a^3$$

olarak hesaplanır.

Örnek 2.27 Şekil 2.14'te görüldüğü gibi $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 4$ eğrilerinin arakesiti olan parabolik silindir yüzeyinden $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$ vektör alanının geçirdiği akıyı bulun.



Şekil 2.14 Parabolik silindir yüzeyi

Çözüm 2.27 Verilen yüzeyde $x = x$, $y = x^2$ ve $z = z$ olduğundan, yer vektörü $\mathbf{r}(x, z) = x\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ yazılabilir. Yüzey normalini bulmak için yer vektörünü kullanabiliriz. Yüzeye teğet iki vektör $\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{r}}{dx} = \mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$ ve

$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{dz} = \mathbf{k}$ olur. Yüzey normali $\mathbf{n}$ bu iki teğet vektöre diktir ve dolayısıyla onların vektörel çarpımından elde edilebilir. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x\mathbf{i} - \mathbf{j}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|} = \frac{2x\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

elde edilir. Verilen yüzeyde $d\mathbf{a} = da\mathbf{n} = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|\, dxdz\mathbf{n}$ olduğundan

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = (yz\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{2x\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{4x^2 + 1}}\right)\sqrt{4x^2 + 1}dxdz$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = (2xyz - x)dxdz$$

olur. $y = x^2$ olduğu hatırlanırsa, yüzey normali yönünde çıkan akı

$$\Phi = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_{z=0}^{4} \left[\int_{x=0}^{1} (2x^3z - x)dx\right] dz$$

$$= \int_{z=0}^{4} \left[\frac{1}{2}x^4z - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 dz = \int_{z=0}^{4} \frac{1}{2}(z-1)dz$$

$$= \left[\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}z\right]_0^4 = \left(\frac{16}{4} - \frac{4}{2}\right) = 2$$

bulunur.■

2.6 Dirac Delta Fonksiyonu

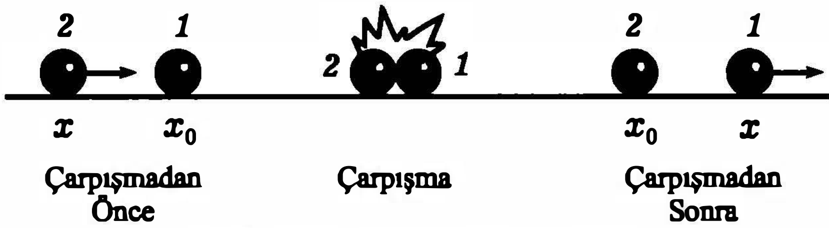
Bu kesimde, fizikte büyük öneme sahip özel bir fonksiyonu tanıtacağız: Dirac Delta fonksiyonu $\delta(x - x_0)$. Bir boyutlu Dirac delta fonksiyonu

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases} \tag{2.51a}$$

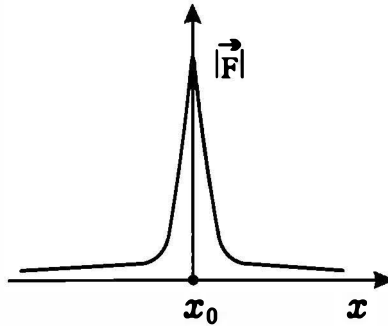
biçiminde tanımlanır. Burada x ve x_0, x ekseni üzerindeki iki noktanın koordinatları, $x - x_0$ ise iki noktanın farkıdır. (2.51a)'ya göre $x - x_0$ farkı sıfır olursa, yani x noktası x_0'la çakışırsa o zaman $\delta(x - x_0)$ sonsuz olmaktadır. $x_0 = 0$ olarak seçilirse Dirac delta fonksiyonu $\delta(x)$

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \tag{2.51b}$$

olur. Dirac delta fonksiyonunu anlamamıza yardımcı olacak bir örnek verelim. Biri x_0 noktasında duran, diğeri ise x ekseni üzerinde ona doğru hareket eden çok küçük, özdeş ve esnek iki topu göz önüne alalım(Şekil 2.15a). İkinci top, birinciye temas edince çarpışma gerçekleşir. Bu çarpışma esnasında, ikinci top birinciyi sıkıştırdıkça, aralarındaki etki-tepki kuvveti gittikçe artar. Momentumun korunumuna uygun olarak ikinci top x_0 noktasında dururken, birincisi $x > x_0$ olacak şekilde uzaklaşmaya başlar. Bu esnada etki-tepki kuvveti azalır ve toplar tamamen ayrılınca da sıfır olur. Birinci topa etkiyen kuvvetin şiddeti kabaca Şekil 2.15b'deki gibi olur.



Şekil 2.15a Çarpışan iki esnek top



Şekil 2.15b Birinci topa etkiyen kuvvetin şiddeti

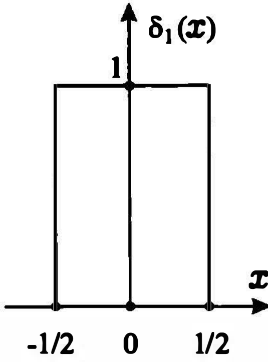
Dirac delta fonksiyonunun fizikteki kullanım biçimi, örneğimizden biraz farklıdır. Örneğin pozitif noktasal bir q elektrik yükünün elektrik alan çizgileri, noktasal yükün konumlandığı noktadan çıkarlar(Şekil 2.1a). Elektrik alan şiddeti kaynak noktasında çok büyük(sonsuz) iken, kaynaktan uzaklaştıkça $E = k\frac{q}{r^2}$ ters kare yasasına göre azalır. Elektrik alanın doğduğu yer $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ fonksiyonu ile tanımlanabilir. Burada $\mathbf{r}_0$ kaynak yükün konum vektörü, $\mathbf{r}$ ise elektrik alanı ölçmek istediğimiz konumun vektörüdür. Burada üç boyutlu Dirac delta fonksiyonunu kullandık. Benzer bir fikir yürütme kütlenin yoğunlaştığı küçük bir uzay bölgesi ve civarında kütle çekim alanını tanımlamak için de kullanılabilir. Eğer göz önüne alınan skaler veya vektör alanı bir noktada çok büyük değer alıyorsa Dirac delta fonksiyonu size yardımcı olur.

Bir boyutlu Dirac delta fonksiyonu için aşağıdaki özellikler verilebilir:

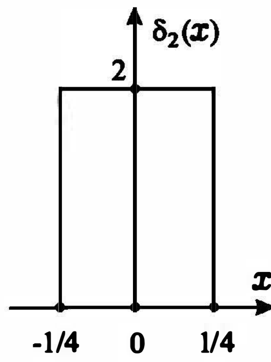
1. Dirac delta fonksiyonunun altındaki alan 1 birimdir. Bu durum

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1 \tag{2.52}$$

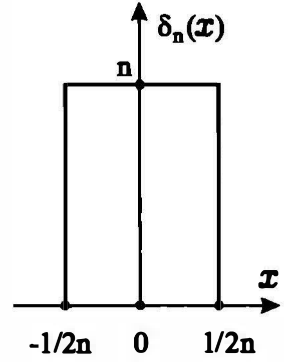
biçiminde yazılabilir. Tanımdan hareketle Dirac delta fonksiyonu bir tümevarımla elde edilebilir. Alanları 1 birim olan aşağıdaki dikdörgenleri ele alalım:



Şekil 2.16a Tabanı 1 olan dikdötgen



Şekil 2.16b Tabanı 1/2 olan dikdötgen



Şekil 2.16c Tabanı $1/n$ olan dikdötgen

Dik dörtgenin alt kenar uzunluğu kısaldıkça yüksekliği artar. Şekil 2.16a'da verilen dikdörtgenin alt kenar uzunlu 1 birim olduğundan yüksekliği de 1 birim olacaktır. Şekil 2.16b'de alt kenar uzunlu $\frac{1}{2}$ birime azalırken yüksekliği 2 birime çıkmıştır. Alt kenar kısaltma işlemi n adımda tekrarlanırsa yüksekliği $\delta_n(x)$

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{1}{2n} \\ n, & -\frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{2n} \\ 0, & x > \frac{1}{2n} \end{cases} \tag{2.53}$$

olarak elde edilir(Şekil 2.16c). $n{\to}\infty$ limitinde $\delta_n(x){\to}\infty$ olur. Bu da (2.51b) eşitliğinde verilen $\delta(x)$ tanımından başka bir şey değildir. Burada $\delta(x)$ fonksiyonundan ziyade, onun

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$$

olarak tanımlanan normalizasyonuna odaklanmaklıyız.

2. Dirac delta fonksiyonu çift fonksiyondur.

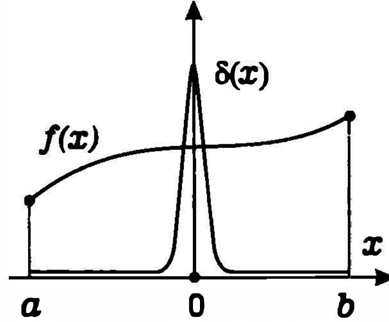
$$\delta(-x) = \delta(x) \tag{2.54}$$

3. k bir sabit olmak üzere

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|}\delta(x) \tag{2.55}$$

şeklindedir.

4. Şekil 2.17'de, $[a, b]$ aralığında tanımlı keyfi bir $f(x)$ fonksiyonu ve Dirac delta fonksiyonu birlikte verilmiştir.



Şekil 2.17 Keyfi bir $f(x)$ ve $\delta(x)$ fonksiyonları

İki fonksiyonun $f(x)\delta(x)$ çarpımı, $x = 0$ noktası hariç her yerde sıfır olur. Çünkü $x = 0$ hariç $\delta(x)$ her yerde sıfırdır. Bu nedenle

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = f(0) \tag{2.56a}$$

olur. $\delta(x - x_0)$ fonksiyonu için de benzer bir eşitlik yazılabilir.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0) \tag{2.56b}$$

Eğer x_0, $[a, b]$ kapalı aralığının içinde kalıyorsa integral aralığı daraltılabilir.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = \int_{a}^{b} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$$

Çünkü $x = x_0$ dışında $f(x)\delta(x - x_0) = 0$'dır.

Üç Boyutlu Dirac Delta Fonksiyonu

Konum vektörleri $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ve $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ olmak üzere, yukarıda verilen sonuçlar üç boyuta genişletilerek

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \begin{cases} \infty, & \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \\ 0, & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \end{cases} \tag{2.57}$$

$$\int \delta(\mathbf{r})d^3\mathbf{r} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y)dy \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z)dz = 1 \qquad (2.58)$$

$$\int f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)d^3\mathbf{r} = f(\mathbf{r}_0) = f(x_0, y_0, z_0) \qquad (2.59)$$

eşitlikleri yazılabilir.

Örnek 2.28 $\int_{-\infty}^{+\infty} (3x^2 + 4x + 5)\delta(x - 1)dx$ integralini hesaplayın.

Çözüm 2.28 $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = 3x^2 + 4x + 5$$

olduğundan ve $x = 1$ noktası $[-\infty, \infty]$ aralığı içinde kaldığından söz konusu integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (3x^2 + 4x + 5)\delta(x - 1)dx = f(1) = 3 + 4 + 5 = 12$$

olarak hesaplanır.

Örnek 2.29 $\int_0^5 tan(\frac{x}{2})e^{Cos(x)+1}\delta(x - \frac{\pi}{2})dx$ integralini hesaplayın.

Çözüm 2.29 $x_0 = \frac{\pi}{2}$ noktası $[0, 5]$ aralığının içindedir.

$$\int_0^5 tan(\frac{x}{2})e^{Cos(x)+1}\delta(x - \frac{\pi}{2})dx = f(\frac{\pi}{2}) = tan(\frac{\pi}{4})e^{Cos(\frac{\pi}{2})+1} = e$$

olarak bulunur. Burada $tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ ve $Cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ değerleri kullanıldı.

Örnek 2.30 $\int_2^{+\infty} x^{256}Cos(x^2)\delta(x - 1)dx$ integralini hesaplayın.

Çözüm 2.30 $x_0 = 1$ noktası $[2, +\infty]$ aralığının dışında olduğundan

$$\int_2^{+\infty} x^{256}Cos(x^2)\delta(x - 1)dx = 0$$

olur.

Örnek 2.31 $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} (x^2 + y^2 + z^2)\delta(x - 1)\delta(y - 1)\delta(z - 1)dxdydz$ integralini hesaplayın.

Çözüm 2.31 (2.59) eşitliğinde $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ ve $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$ kullanılırsa

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty (x^2 + y^2 + z^2)\delta(x-1)\delta(y-1)\delta(z-1)dxdydz = 3$$

bulunur.■

BÖLÜM SONU PROBLEMLERİ

2.1 $\phi(x,y,z) = x^2Cos^2(y)ln(z)$ skaler alanın gradyanını hesaplayın. $\nabla\phi = ?$

2.2 $\mathbf{A}(x,y,z) = e^x y\mathbf{i} + (e^x + 2y)\mathbf{j}$ vektör alanı veriliyor. **a)** $div\mathbf{A} = ?$ **b)** $rot\mathbf{A} = ?$

2.3 $f(x,y,z) = x^3 - 3xy^2$ skaler alanının Laplasiyenini hesaplayın. $\nabla^2 f = ?$

2.4 $\phi(x,y,z) = e^x Sin(2y)Cos(3z)$ skaler alanının $\nabla^2\phi + 12\phi = 0$ denklemini sağladığını gösterin.

2.5 Üç boyutlu uzayda konum ve hız vektörleri sırasıyla $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ve $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ olarak veriliyor. $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{r} = \mathbf{v}$ olduğunu gösterin.

2.6 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ile verilen yer vektörünün boyu $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ile verilmektedir. $\nabla(\frac{1}{r}) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ olduğunu gösterin.

2.7 $\nabla^2(\frac{1}{r}) = 0$ olduğunu gösterin.

2.8 $x^2y + 2xz = 4$ yüzeyinin $P(2,-2,3)$ noktasındaki normal vektörü bulun.

2.9 $\mathbf{A}(x,y,z) = yz\mathbf{i} + 2xz\mathbf{j} + 3xy\mathbf{k}$ ve $\mathbf{B}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vektör alanları veriliyor. **a)** $P(1,1,1)$ noktasında **A** ve **B** vektörleri arasındaki açıyı bulunuz. **b)** (2.26) ile verilen $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$ eşitliğini doğrulayınız.

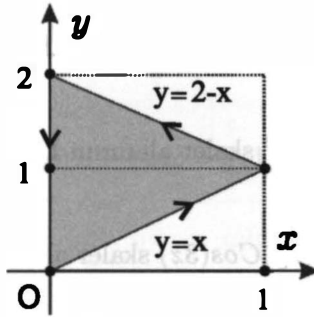
2.10 $\phi(x,y,z) = 3x^2yx$ skaler ve $\mathbf{A}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ vektör alanlarını kullanarak $\nabla\times(\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi)\times\mathbf{A} + \phi(\nabla\times\mathbf{A})$ özdeşliğini ispatlayın.

2.11 **a)** $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy^2 + z)\mathbf{i} + (x^2y + 2)\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ vektör alanının korunumlu olduğunu gösterin. **b)** Bu vektör alanı üreten bir $\phi(x,y,z)$ skaler

alanını elde edin. Skaler alanın orijindeki değerini $\phi(0,0,0) = 0$ alın. Sonucunuzu test edin. ($\mathbf{F} = -\nabla\phi$)

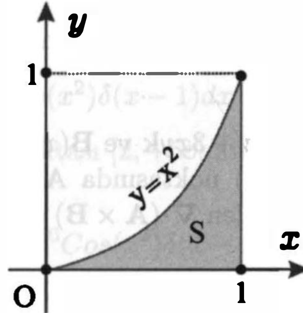
2.12 $\mathbf{A}(x,y,z) = xz\mathbf{i} + e^y x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ve $\mathbf{B}(x,y,z) = ln(x)Sin(y)\mathbf{i} - z\mathbf{j}$ vektör alanlarını kullanarak $\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y}$ olduğunu gösteriniz.

2.13 Şekil 2.18'de verilen kapalı eğri için $\oint_C (x^2+y^2)dx + (x+2y)dy$ integralini düzlemde Green teoremi yardımı ile hesaplayın.



Şekil 2.18 Üçgensel bölge ve sınırı

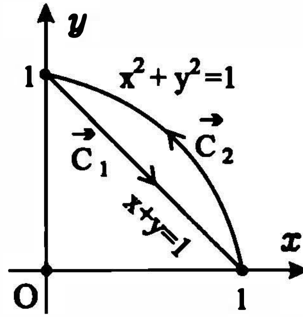
2.14 Şekil 2.19'da verilen $y = 0$, $x = 1$ ve $y = x^2$ eğrilerinin sınırladığı yüzey için $\int\int e^{y/x}dxdy$ integralini hesaplayın. *Cevap:*1/2



Şekil 2.19 S yüzeyi ve sınırı

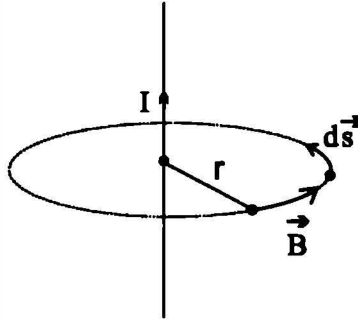
2.15 $\mathbf{A}(x,y) = -y^2\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ vektör alanı ile Şekil 2.20'da verilen yüzeyi

ve sınırını kullanarak Stokes teoremini doğrulayın. *Cevap:*1/3



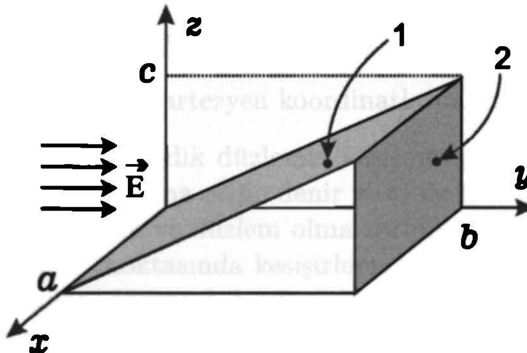
Şekil 2.20 Çember ve doğrunun arakesiti

2.16 Şekil 2.21'de verildiği gibi kararlı I akımı taşıyan uzun bir telin oluşturduğu manyetik alanı $\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$ Ampere yasasından yararlanarak bulun. Burada kapalı eğri, akım telinin etrafını saran r yarıçaplı çembersel halkadır. Halka üzerinde manyetik alanın şiddeti B sabittir.



Şekil 2.21 Halka üzerinde **B** ve $d\mathbf{s}$

2.17 $\mathbf{E} = E_0\mathbf{j}$ düzgün elektrik alanının Şekil 2.22'de verilen 1 ve 2 nolu yüzeylerden geçirdiği akıları hesaplayarak karşılaştırın.



Şekil 2.22 İki dikdörtgensel yüzey

2.18 $\int_0^{\infty} x ln(\frac{1}{x})\delta(x-e)dx$ integralini hesaplayın.

2.19 $\int_0^{5}(4x^{33}+2x^{12}+100)ln(x+e)\delta(x)dx$ integralini hesaplayın.

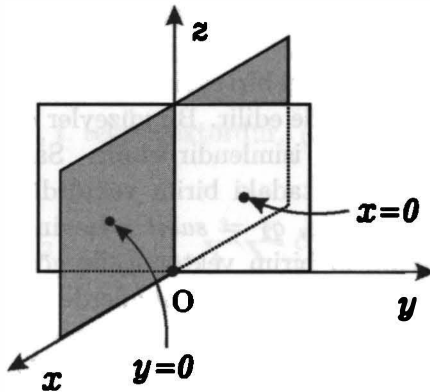


BÖLÜM 3 DİK EĞRİSEL KOORDİNATLAR

Bölüm 1 ve Bölüm 2'de kartezyen koordinatları kullandık. Kartezyen koordinat sistemi kare, üçgen, dikdörtgen ve küp geometrisine sahip problemler için uygundur. Ancak küresel, silindirik geometriye sahip sistemler için uygun değildir. Bu bölümde genel olarak dik eğrisel koordinatları tanımlandıktan sonra kutupsal, silindirik ve küresel koordinat sistemleri detaylı olarak verilip, örnek problem çözümleriyle pekiştirilecektir.

3.1 Eğrisel ve Dik Eğrisel Koordinatlar

Şekil 3.1a'da görüldüğü gibi kartezyen koordinat sisteminde yüzeyler $x = sabit$, $y = sabit$ ve $z = sabit$ koşulunu sağlayan yani dik eksenleri kesen düzlemlerdir. Bu yüzeylerde keyfi bir $P(x, y, z)$ noktasının bir koordinatı sabit kalırken diğer ikisi değişir. Örneğin $x = sabit$ yüzeyinde $P(x = sabit, y, z)$ şeklindedir. Düzlemlerden herhangi iki tanesi çakıştırılırsa bir doğru elde edilir. Bu doğru üzerindeki bir noktanın sadece bir koordinatı değişir. Örneğin $x = sabit$, $y = sabit$ yüzeyleri çakıştırılmış ise sadece z koordinatı değişir(Şekil 3.1a). Bu durumda elde edilen doğru z doğrusudur.



Şekil 3.1a Kartezyen koordinatlarda düzlemler

$P(0, 0, 0)$ noktasında üç dik düzlemin kesişmesiyle koordinat eksenleri elde edilir. $P(0, 0, 0)$ noktasına orijin denir ve O ile gösterilir. Genel olarak bu yüzeylerin birbirine dik ve düzlem olma zorunlulukları yoktur. Düz olmayan üç yüzey bir P noktasında kesişirlerse yine de üç çizgi elde edilir. Fakat arakesit çizgileri doğrusal değil eğriseldir. Bunlara koordinat eğrileri ve bu eğrilerin üzerindeki q_1, q_2 ve q_3 noktalarına eğrisel koordinatlar denir(Şekil 3.1b).

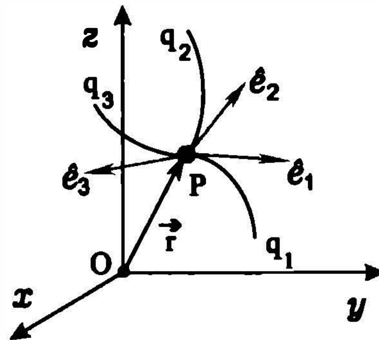
Kartezyen x, y ve z koordinatları, eğrisel q_1, q_2 ve q_3 koordinatlarına bağlı olacaktır. Yani,

$$x = x(q_1, q_2, q_3) \quad (3.1a)$$

$$y = y(q_1, q_2, q_3) \quad (3.1b)$$

$$z = z(q_1, q_2, q_3) \quad (3.1c)$$

olur.



Şekil 3.1b Eğrisel koordinatlar

Tersine q_1, q_2 ve q_3 eğrisel koordinatları da x, y ve z cinsinden yazılabilir:

$$q_1 = q_1(x, y, z) \quad (3.2a)$$

$$q_2 = q_2(x, y, z) \quad (3.2b)$$

$$q_3 = q_3(x, y, z) \quad (3.2c)$$

Eğrisel koordinatların herhangi biri sabit tutulup, diğerlerinin değişimine izin verilirse bir eğrisel yüzey elde edilir. Bu yüzeyler $q_1 = sabit$, $q_2 = sabit$ ve $q_3 = sabit$ yüzeyleri olarak isimlendirilebilir. Sabit yüzeyin bir noktasındaki yüzey normali o noktadaki birim vektördür. Yani $q_1 = sabit$ yüzeyindeki birim vektör $\widehat{q}_1$ ile, $q_2 = sabit$ yüzeyindeki birim vektör $\widehat{q}_2$ ile ve $q_3 = sabit$ yüzeyindeki birim vektör $\widehat{q}_3$ ile gösterilir. $\widehat{q}_1$, $\widehat{q}_2$ ve $\widehat{q}_3$ temsilleri yerine bu bölümde de önceki bölümlerde kullanılan $\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$ ve $\mathbf{e}_3$ gösterimlerini kullanmaya devam edeceğiz. Kartezyen koordinatlarda **i**, **j** ve **k** birim vektörlerinin yönü sabitti. Oysa eğrisel koordinatlarda birim vektörler noktadan noktaya yön değiştirirler.

Kartezyen koordinatlarda, yüzey ve hacim elemanlarını dx, dy ve dz diferansiyellerinin çarpımından elde ediyorduk. Örneğin hacim elemanı $dV = dxdydz$ iken z eksenini kesen bir yüzeyde, yüzey elemanı $da = dxdy$ idi. Eğrisel koordinatlarda bu işlemler kolay değildir. Ancak eğrisel yüzeylerin birbirine dik olduğu, dik eğrisel koordinatlarda yüzey ve hacim elemanları dq_i diferansiyellerinin çarpımından elde edilebilirler. Bazı kaynaklarda kullanılan ortogonal eğrisel koordinatlar deyimi, dik eğrisel koordinatlarla aynı anlamdadır.

Kartezyen koordinat sisteminde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ biçiminde yazılan yer vektörü, eğrisel koordinatlarda genel olarak $\mathbf{r} = q_1\mathbf{e}_1 + q_2\mathbf{e}_2 + q_3\mathbf{e}_3$ biçiminde yazılamaz. Bunu daha sonra göreceğiz. Şimdi sonsuz yakın iki nokta arasındaki uzaklığın karesini yani, $ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2$'yi göz önüne alalım. ds^2'yi hesaplamak için dx, dy ve dz diferansiyellerini bilmek gerekir. (3.1a)'da görüldüğü gibi x koordinatı q_1, q_2 ve q_3'ün fonksiyonu olduğundan dx diferansiyeli zincir kuralına göre

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}dq_3 \tag{3.3a}$$

şeklinde olur. Benzer ifadeler dy ve dz için de yazılabilir:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3}dq_3 \tag{3.3b}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3}dq_3 \tag{3.3c}$$

Şimdi $\mathbf{r}$'deki sonsuz küçük değişimi yani $d\mathbf{r}$'yi elde edebiliriz. (3.3a), (3.3b) ve (3.3c)'de elde edilen diferansiyeller $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \frac{\partial(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{\partial q_3}dq_3 \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3}dq_3 = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}dq_i \end{aligned} \tag{3.4}$$

bulunur. Burada $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$, i. teğet vektördür. (3.4) ile verilen ifade $ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$ 'de yerine yazılırsa

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j}dq_i\, dq_j \tag{3.5}$$

elde edilir. Teğet vektörlerin skaler çarpımları için

$$g_{ij} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \tag{3.6}$$

tanımı yapılır. g_{ij}'nin 9 elemanı vardır ve elemanlar 3×3'lük bir matris oluşturur. Eğer sadece köşegen elemanlar olan g_{11}, g_{22} ve g_{33} sıfırdan farklı ise eğrisel koordinatlarımız ortogonaldir. Bu teğet vektörlerin birbirlerine dik olduğu anlamına gelmektedir. Eğer eğrisel koordinatlar dik değilse, köşegen olmayan terimler de sıfırdan farklı olacaktır. Bu bölümde sadece $i \neq j$ için $g_{ij} = 0$ olan dik eğrisel koordinatlarla ilgileneceğiz. i. teğet

vektör yönündeki birim vektörü $\mathbf{e}_i$ ve teğet vektörün büyüklüğünü h_i ile gösterirsek

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right| \mathbf{e}_i = h_i \, \mathbf{e}_i \tag{3.7}$$

elde edilir. h_i'lere skala faktörleri yada skala çarpanları denir. (3.7) ifadesi, $\mathbf{e}_i$ birim vektörlerini kartezyen $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ve $\mathbf{k}$ birim vektörleri cinsinden elde etmemizi sağlar:

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}/\partial q_i}{|\partial \mathbf{r}/\partial q_i|} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \tag{3.8}$$

Dik eğrisel koordinatlarda birim vektörler diktir. Bu durumda

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \tag{3.9}$$

yazılabilir. (3.6) eşitliğine tekrar dönelim. $j = i$ için $g_{ii} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = h_i^2$ olur. (3.5) ile verilen ds^2, skala çarpanları cinsinden

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=j=1}^{3} (h_i dq_i)^2 = (h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2 \tag{3.10}$$

olarak yazılabilir. (3.10) eşitliğindeki $h_i dq_i$'ler $\mathbf{e}_i$ yönündeki yay uzunluklarıdır. Yay uzunluklarını ds_i ile gösterirsek

$$ds_i = h_i dq_i \quad i = 1, 2, 3 \tag{3.11}$$

yazılabilir. ds_i yay uzunluklarını elde etmek için iki koordinatı sabit tutmak ve üçüncüsünün sonsuz küçük değişimine izin vermek gerekir. Buna göre, yer vektöründeki sonsuz küçük değişimin

$$d\mathbf{r} = h_1 dq_1 \mathbf{e}_1 + h_2 dq_2 \mathbf{e}_2 + h_3 dq_3 \mathbf{e}_3 = ds_1 \mathbf{e}_1 + ds_2 \mathbf{e}_2 + ds_3 \mathbf{e}_3 \tag{3.12}$$

olduğu görülür. Bunu çizgi integrallerinde kullanacağız. Diğer yandan yüzey elemanları iki tane yay uzunluğu çarpılarak elde edilir. Genel olarak yüzeyleri

$$da_i = ds_j ds_k, \;\; i \neq j \neq k \tag{3.12}$$

indisleriyle etiketlemek mümkündür. Yüzey normalleri de eklenerek üç tane yüzey elemanı vektörü yazılabilir. Yüzey elemanı vektörü sabit tutulan koordinatın birim vektörü yönündedir. Bu göre;

$$q_1 = \textit{sabit} \text{ yüzeyi için: } d\mathbf{a}_1 = ds_2 ds_3 \mathbf{e}_1 = h_2 h_3 dq_2 dq_3 \mathbf{e}_1 \tag{3.13a}$$

$$q_2 = \textit{sabit} \text{ yüzeyi için: } d\mathbf{a}_2 = ds_1 ds_3 \mathbf{e}_2 = h_1 h_3 dq_1 dq_3 \mathbf{e}_2 \tag{3.13b}$$

$$q_3 = \textit{sabit} \text{ yüzeyi için: } d\mathbf{a}_3 = ds_1 ds_2 \mathbf{e}_3 = h_1 h_2 dq_1 dq_2 \mathbf{e}_3 \tag{3.13c}$$

elde edilir. Üç yay elemanının çarpımı ile

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \tag{3.14}$$

hacim elemanı elde edilir. Hacim elemanı skaler bir büyüklüktür. Hacim elemanını elde etmek için $J\left(\frac{x,y,z}{q_1,q_2,q_3}\right)$ şeklinde yazılan Jakobiyen kullanılabilir. Jakobiyen kısmi türevler cinsinden

$$dV = J\left(\frac{x,y,z}{q_1,q_2,q_3}\right) dq_1dq_2dq_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} dq_1dq_2dq_3$$

şeklindedir.

Dik eğrisel koordinatlarda iki vektör alanı $\mathbf{A}(q_1,q_2,q_3) = A_1\mathbf{e}_1+A_2\mathbf{e}_2+A_3\mathbf{e}_3$ ve $\mathbf{B}(q_1,q_2,q_3) = B_1\mathbf{e}_1+B_2\mathbf{e}_2+B_3\mathbf{e}_3$ verilmiş olsun. Bu iki vektörün skaler çarpım

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \sum_i\sum_j A_iB_j\delta_{ij} = \sum_i A_iB_i \tag{3.15}$$

biçimindedir. Vektörel çarpım ise

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \tag{3.16}$$

şeklinde yazılabilir. (3.15) ve (3.16) ile verilen skaler ve vektörel çarpım ifadeleri, Bölüm 1'de elde edilen skaler ve vektör çarpım ile aynıdır. Fakat gradyan, diverjans, rotasyonel gibi işlemler biraz farklıdır. Bunu görebilmek için dik eğrisel koordinatlara bağlı $\phi(q_1,q_2,q_3)$ şeklindeki bir skaler alanın gradyanına yoğunlaşalım.

Skaler bir $\phi(q_1,q_2,q_3)$ alanın gradyanının bir vektör olduğunu biliyoruz. Sonuç vektörü

$$\nabla\phi = f_1\mathbf{e}_1 + f_2\mathbf{e}_2 + f_3\mathbf{e}_3 \tag{3.17}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer f_1, f_2 ve f_3 bileşenlerini elde edebilirsek, dik eğrisel koordinatlarda ∇ işlemcisi elde edilmiş oluruz. Bunun için önce ϕ'nin diferansiyeline bakalım. Zincir kuralına göre

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\phi}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial\phi}{\partial q_3}dq_3 \tag{3.18}$$

olur. Diğer yandan $\nabla\phi$ ile $d\mathbf{r}$ skaler çarpılırsa

$$\begin{aligned} d\phi &= \nabla\phi\cdot d\mathbf{r} = [f_1\mathbf{e}_1 + f_2\mathbf{e}_2 + f_3\mathbf{e}_3]\cdot[h_1dq_1\mathbf{e}_1 + h_2dq_2\mathbf{e}_2 + h_3dq_3\mathbf{e}_3] \\ &= f_1h_1dq_1 + f_2h_2dq_2 + f_3h_3dq_3 \end{aligned} \tag{3.19}$$

olarak elde edilir. (3.18) ve (3.19) ifadelerinin sağ tarafları eşitlenirse

$$f_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1}, \quad f_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2}, \quad f_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3}$$

elde edilir. Genellersek

$$f_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\phi}{\partial q_i},\ i = 1,2,3 \tag{3.20}$$

olur. Bunlar (3.17)'de yerine yazılırsa, ϕ'nin gradyanı elde edilir:

$$grad(\phi) = \nabla\phi = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3} \tag{3.21}$$

Son olarak (3.21) eşitliğinin iki tarafından ϕ kaldırılırsa, ∇ işlemcisi

$$\nabla = \mathbf{e}_1\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \mathbf{e}_2\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2} + \mathbf{e}_3\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3} \tag{3.22}$$

olarak bulunur. Daha sonra kullanmak üzere iki özelliği burada verelim:

1. (3.21)'de $\phi = q_1$ yazılır

$$\nabla q_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial q_1}{\partial q_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial q_1}{\partial q_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial q_1}{\partial q_3}\mathbf{e}_3$$

ve $\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij}$ ifadesi kullanılırsa

$$\nabla q_1 = \frac{1}{h_1}\mathbf{e}_1 \Rightarrow \mathbf{e}_1 = h_1\nabla q_1 \tag{3.23a}$$

elde edilir. Aynı işlemler q_2 ve q_3 koordinatları için yapılırsa

$$\nabla q_2 = \frac{1}{h_2}\mathbf{e}_2 \Rightarrow \mathbf{e}_2 = h_2\nabla q_2 \tag{3.23b}$$

$$\nabla q_3 = \frac{1}{h_3}\mathbf{e}_3 \Rightarrow \mathbf{e}_3 = h_3\nabla q_3 \tag{3.23c}$$

sonuçları elde edilir.

2. ∇q_2 ile ∇q_3 vektörel çarpılırsa

$$\nabla q_2 \times \nabla q_3 = \left(\frac{1}{h_2}\mathbf{e}_2\right) \times \left(\frac{1}{h_3}\mathbf{e}_3\right) = \frac{1}{h_2 h_3}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3}$$

olur. Burada $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$ kullanıldı. Bu sonuç Levi-Civita sembolü kullanılarak diğer çarpımları da içerecek şekilde genelleştirilebilir.

$$\nabla q_i \times \nabla q_j = \varepsilon_{ijk}\frac{\mathbf{e}_k}{h_i h_j} \Rightarrow \mathbf{e}_k = \varepsilon_{ijk}h_i h_j\left(\nabla q_i \times \nabla q_j\right) \tag{3.24}$$

Burada $\frac{1}{\varepsilon_{ijk}} = \varepsilon_{ijk}$ eşitliği kullanıldı.

Şimdi dik eğrisel koordinatlarda bir $\mathbf{A} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$ vektör alanının

$$div\mathbf{A} = \nabla\cdot\mathbf{A} = \nabla\cdot(A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3)$$

şeklinde verilen diverjansına bakalım. Kartezyen koordinatlardan farklı olarak $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ birim vektörleri (3.24)'te görüldüğü gibi sabit olmayan h_i skala faktörlerine bağlıdır. Bu nedenle $div\mathbf{A}$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial A_1}{\partial q_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial A_2}{\partial q_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial A_3}{\partial q_3}$$

biçiminde yazılamaz. Diverjans işleminin ilk terimini, yani $\nabla \cdot (A_1\mathbf{e}_1)$'i ele alalım ve $\mathbf{e}_1 = h_2h_3(\nabla q_2 \times \nabla q_3)$ yazalım. Bu durumda

$$\nabla \cdot (A_1\mathbf{e}_1) = \nabla \cdot [A_1h_2h_3(\nabla q_2 \times \nabla q_3)] \tag{3.25}$$

elde edilir. Burada $A_1h_2h_3$ çarpımı skaler, $\nabla q_2 \times \nabla q_3$ çarpımı ise vektör olduğundan eşitliğin sağ tarafı

$$\begin{aligned}\nabla \cdot [A_1h_2h_3(\nabla q_2 \times \nabla q_3)] &= \nabla(A_1h_2h_3)\cdot(\nabla q_2 \times \nabla q_3)\\ &\quad + (A_1h_2h_3)[\nabla\cdot(\nabla q_2 \times \nabla q_3)]\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Şimdi $\nabla q_2 \times \nabla q_3 = \frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}$ yazılırsa

$$\nabla \cdot (A_1\mathbf{e}_1) = \nabla(A_1h_2h_3)\cdot\frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3} + (A_1h_2h_3)\left[\nabla\cdot\frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}\right]$$

olur. Birim vektörün büyüklüğü sabit olduğundan, köşeli parantez içindeki $\nabla\cdot\frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3} = 0$ olur. Böylece sadece birinci terim kalır. ∇ açıkça yazılır ve skaler çarpımın değişme özelliği kullanılırsa

$$\nabla \cdot (A_1\mathbf{e}_1) = \frac{\mathbf{e}_1}{h_2h_3}\cdot\left[\mathbf{e}_1\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \mathbf{e}_2\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2} + \mathbf{e}_3\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\right](A_1h_2h_3)$$

elde edilir. Birim vektörler dik olduklarından $\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_3 = 0$ olurken sadece $\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 = 1$ kalır. Sonuç olarak

$$\nabla \cdot (A_1\mathbf{e}_1) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1h_2h_3) \tag{3.26}$$

eşitliği elde edilir. Benzer işlemler $\nabla \cdot (A_2\mathbf{e}_2)$ ve $\nabla \cdot (A_3\mathbf{e}_3)$ terimleri için yapılır ve düzenlenirse $div\mathbf{A}$ için

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2h_3A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1h_3A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1h_2A_3)\right] \tag{3.27}$$

elde edilir.

Şimdi amacımız dik eğrisel koordinatlarda bir $\mathbf{A}$ vektör alanı için

$$rot\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla\times(A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3)$$

biçiminde yazılan rotasyoneli bulmaktır. Diverjans işlemindeki gibi yine ilk terimi, yani $\nabla \times (A_1 \mathbf{e}_1)$ terimini ele alalım. $\mathbf{e}_1$ yerine (3.23a) ile verilen $\mathbf{e}_1 = h_1 \nabla q_1$ özdeşi yazılırsa

$$\nabla \times (A_1 \mathbf{e}_1) = \nabla \times (A_1 h_1 \nabla q_1)$$

olur. Burada $A_1 h_1$ çarpımı skaler, ∇q_1 ise vektörel büyüklüktür. Bu durumda $\nabla \times (A_1 h_1 \nabla q_1)$ işlemine çarpım kuralı uygulanırsa

$$\nabla \times (A_1 h_1 \nabla q_1) = \nabla (A_1 h_1) \times \nabla q_1 + (A_1 h_1)(\nabla \times \nabla q_1)$$

olur. $\nabla \times \nabla q_1 = 0$ olduğundan ikinci terim 0 olur. ∇q_1 yerine (3.23a) eşitliğine göre $\nabla q_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1}$ konur ve ∇ açıkça yazılırsa

$$\nabla \times (A_1 \mathbf{e}_1) = \left[\mathbf{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right] (A_1 h_1) \times \frac{\mathbf{e}_1}{h_1}$$

bulunur. Birim vektörlerin vektörel çarpımları için $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = 0$ ve $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$ yazılır ve düzenlenirse

$$\nabla \times (A_1 \mathbf{e}_1) = \left[\frac{\mathbf{e}_2}{h_1 h_3} \frac{\partial (A_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2} \frac{\partial (A_1 h_1)}{\partial q_2} \right] \tag{3.28a}$$

eşitliği elde edilir. $\nabla \times (A_2 \mathbf{e}_2)$ ve $\nabla \times (A_3 \mathbf{e}_3)$ terimleri için benzer işlemler yapılırsa

$$\nabla \times (A_2 \mathbf{e}_2) = \left[\frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2} \frac{\partial (A_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3} \frac{\partial (A_2 h_2)}{\partial q_3} \right] \tag{3.28b}$$

$$\nabla \times (A_3 \mathbf{e}_3) = \left[\frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3} \frac{\partial (A_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\mathbf{e}_2}{h_1 h_3} \frac{\partial (A_3 h_3)}{\partial q_1} \right] \tag{3.28c}$$

elde edilir. (3.28a), (3.28b) ve (3.28c) taraf tarafa toplanırsa $rot\mathbf{A}$ için

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} \; = \; & \frac{\mathbf{e}_1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial (A_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (A_2 h_2)}{\partial q_3} \right] + \frac{\mathbf{e}_2}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial (A_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial (A_3 h_3)}{\partial q_1} \right] \\ & + \frac{\mathbf{e}_3}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial (A_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (A_1 h_1)}{\partial q_2} \right] \end{aligned} \tag{3.29}$$

sonucu bulunur. (3.29) ile verilen $\nabla \times \mathbf{A}$, determinant yardımı ile

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \tag{3.30}$$

şeklinde yazılabilir.

Son olarak skaler ϕ fonksiyonunun Laplasiyenine bakalım. Laplasiyen

$$\nabla^2\phi = divgrad(\phi) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\boldsymbol{\nabla}\phi$ bir vektör yapısına sahip olduğundan $\boldsymbol{\nabla}\phi = f_1\mathbf{e}_1 + f_2\mathbf{e}_2 + f_3\mathbf{e}_3$ biçimindedir. (3.20) ifadesinde f_i vektör bileşenleri $f_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\phi}{\partial q_i}$, $i = 1, 2, 3$ olarak olarak verilmişti. $f_i \rightarrow A_i$ olarak yazılırsa bir şey değişmez. $A_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1}$, $A_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2}$ ve $A_3 = \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3}$ vektör bileşenleri (3.27) eşitliğinde yerine yazılırsa $\nabla^2\phi$ için

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3}\right)\right] \tag{3.31}$$

bulunur. (3.31) eşitliğinin iki tarafından ϕ fonksiyonu kaldırılırsa, ∇^2 Laplace işlemcisi için

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\right)\right] \tag{3.32}$$

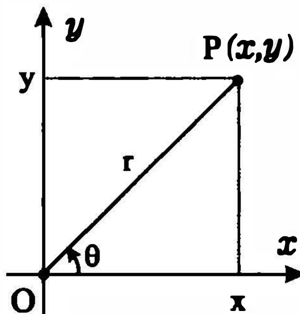
genel ifadesi elde edilir.

3.2 Bazı Dik Eğrisel Koordinat Sistemleri

Bu kesimde, dik eğrisel koordinatlar ailesinden olan ve sıkça kullanılan kutupsal, silindirik ve küresel koordinatları inceleyeceğiz.

3.2.1 Kutupsal Koordinat Sistemi

İki boyutlu kartezyen koordinat sisteminde keyfi bir P noktası (x, y) ile belirlenir. Ancak aynı P noktasını, iki yeni koordinat olan $(q_1, q_2) = (r, \theta)$ ile belirleyebiliriz. Burada r, $\mathbf{r}$ yer vektörünün büyüklüğü, θ ise $+x$ ekseni ile saat ibresi tersine gidilerek ölçülen açıdır. (r, θ) ikilisine polar yada kutupsal koordinatlar denir. Kutupsal koordinatlar Şekil 3.2a'da verilmiştir.



Şekil 3.2a Kutupsal koordinatlar

Kartezyen (x, y) koordinatlar ile kutupsal (r, θ) koordinatları arasındaki ilişki

$$x = x(r,\theta) = rCos\theta \qquad (3.33a)$$
$$y = y(r,\theta) = rSin\theta \qquad (3.33b)$$

şeklindedir. Ters dönüşümler şöyle elde edilir. x ve y koordinatlarının kareleri toplanırsa

$$x^2 + y^2 = (rCos\theta)^2 + (rSin\theta)^2 = r^2\left(Cos^2\theta + Sin^2\theta\right) = r^2$$

olur. Burada $Cos^2\theta + Sin^2\theta = 1$ kullanıldı. Bu eşitliğin iki tarafının karekökü alınırsa, birinci eğrisel koordinat olan $q_1 = r$ için

$$r = r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2},\ 0 \le r \le \infty \qquad (3.34a)$$

elde edilir. x ve y koordinatları $-\infty \le x \le +\infty$ ve $-\infty \le y \le +\infty$ aralığında değer alırken r, $0 \le r \le \infty$ aralığında değişir. r koordinatı P noktasının orijine olan uzaklığını gösterir. Bu kez $\frac{y}{x}$ ifadesine bakalım:

$$\frac{y}{x} = \frac{r\ Sin\theta}{r\ Cos\theta} = \frac{Sin\theta}{Cos\theta} = tan\theta$$

bulunur. Buradan θ çözülürse

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right),\ 0 \le \theta \le 2\pi \qquad (3.34b)$$

elde edilir. Yer vektörü kutupsal koordinatlar cinsinden

$$\mathbf{r}(r,\theta) = rCos\theta\mathbf{i} + rSin\theta\mathbf{j} \qquad (3.35)$$

olur. Kutupsal koordinatlarda skala faktörlerini bulmak için (3.6) eşitliği kullanılabilir. Önce $q_1 = r$ için işlem yapılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_1} &= \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = \frac{\partial\left(rCos\theta\mathbf{i} + rSin\theta\mathbf{j}\right)}{\partial r} = Cos\theta\mathbf{i} + Sin\theta\mathbf{j} \\
g_{11} &= h_1^2 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = (Cos\theta\mathbf{i} + Sin\theta\mathbf{j})\cdot(Cos\theta\mathbf{i} + Sin\theta\mathbf{j}) \\
g_{11} &= Cos^2\theta\ + Sin^2\theta\ = 1 \Rightarrow h_1 = 1
\end{aligned}$$

bulunur. İkinci olarak $q_2 = \theta$ için işlem yapılırsa

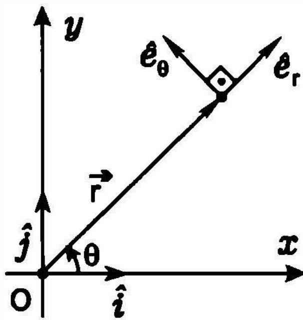
$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_2} &= \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial\left(rCos\theta\mathbf{i} + rSin\theta\mathbf{j}\right)}{\partial \theta} = -rSin\theta\mathbf{i} + rCos\theta\mathbf{j} \\
g_{22} &= h_2^2 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial \theta} = (-rSin\theta\mathbf{i} + rCos\theta\mathbf{j})\cdot(-rSin\theta\mathbf{i} + rCos\theta\mathbf{j}) \\
g_{22} &= r^2\left(Cos^2\theta\ + Sin^2\theta\ \right) = r^2 \Rightarrow h_2 = r
\end{aligned}$$

olur. (3.8) eşitliğine göre, kutupsal koordinatlarda birim vektörler

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r = \widehat{r} = \frac{\partial \mathbf{r}/\partial r}{|\partial \mathbf{r}/\partial r|} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = Cos\theta \mathbf{i} + Sin\theta \mathbf{j} \qquad (3.36a)$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta = \widehat{\theta} = \frac{\partial \mathbf{r}/\partial \theta}{|\partial \mathbf{r}/\partial \theta|} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -Sin\theta \mathbf{i} + Cos\theta \mathbf{j} \qquad (3.36b)$$

olarak elde edilir. Burada $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r = \widehat{r}$ ve $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta = \widehat{\theta}$ eşitlikleri aynı birim vektörlerin farklı gösterimleridir. Kutupsal koordinatlarda birim vektörler Şekil 3.2b'de verilmiştir.



Şekil 3.2b Kutupsal koordinatlarda birim vektörler

Kutupsal koordinatlarda bazı nicelikler:

1. Yay elemanları: $ds_1 = dr,\ ds_2 = rd\theta$
2. Yer vektörünün diferansiyeli: $d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + rd\theta\mathbf{e}_\theta$
3. Yüzey elemanı: $z = sabit = 0,\ da = rdrd\theta$
4. Gradyan işlemcisi: $\nabla = \mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$

Örnek 3.1 $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta = 1$ ve $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = 0$ olduğunu gösteriniz.
Çözüm 3.1 $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1$ ve $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = 0$ olduğu hatırlanırsa

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = (Cos\theta\mathbf{i} + Sin\theta\mathbf{j}) \cdot (Cos\theta\mathbf{i} + Sin\theta\mathbf{j}) = Cos^2\theta + Sin^2\theta = 1$$

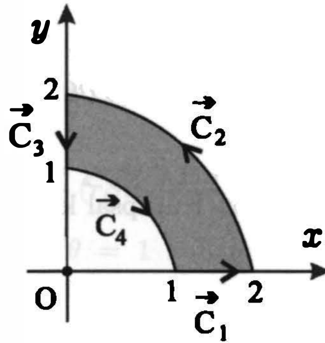
$$\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta = (-Sin\theta\mathbf{i} + Cos\theta\mathbf{j}) \cdot (-Sin\theta\mathbf{i} + Cos\theta\mathbf{j}) = Sin^2\theta + Cos^2\theta = 1$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = (Cos\theta\mathbf{i} + Sin\theta\mathbf{j}) \cdot (-Sin\theta\mathbf{i} + Cos\theta\mathbf{j}) = Sin\theta Cos\theta - Cos\theta Sin\theta = 0$$

bulunur.

Örnek 3.2 $\mathbf{A}(r,\theta) = r\widehat{r} + rSin\theta\widehat{\theta}$ vektör alanı ve Şekil 3.3'te verilen

basit kapalı eğri için $\oint_c \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ integralini hesaplayın.



Şekil 3.3 Çembersel kesit

Çözüm 3.2 $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = (r\mathbf{e}_r + rSin\theta\mathbf{e}_\theta) \cdot (dr\mathbf{e}_r + rd\theta\mathbf{e}_\theta) = rdr + r^2 Sin\theta d\theta$ olur. Kapalı eğri dört bileşenden oluşuyor.

C_1 eğrisi boyunca $\theta = sabit = 0$ olduğundan $d\theta = 0$ ve $Sin0 = 0$ olur. Buna göre

$$\int_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r=1}^{2} rdr = \left.\frac{r^2}{2}\right|_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

bulunur.

C_2 eğrisi boyunca $r = sabit = 2$ ve $dr = 0$ olur. Böylece

$$\int_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\theta=0}^{\pi/2} 4Sin\theta d\theta = 4\left[-Cos\theta\right]_0^{\pi/2} = 4$$

olur.

C_3 eğrisi boyunca $\theta = sabit = \pi/2$ olduğundan $d\theta = 0$ ve $Sin\pi/2 = 1$ olur. Buna göre

$$\int_{C_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r=2}^{1} rdr = \left.\frac{r^2}{2}\right|_2^1 = \frac{1}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{3}{2}$$

bulunur.

C_4 eğrisi boyunca $r = sabit = 1$ ve $dr = 0$ olur. Böylece

$$\int_{C_4} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\theta=\pi/2}^{0} Sin\theta d\theta = \left[-Cos\theta\right]_{\pi/2}^{0} = -1$$

olur. Sonuç olarak $\oint_c \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 3$ olur.

Örnek 3.3 Kutupsal koordinatlarda hareket eden m kütleli bir cisim düşünelim. Cismin konum vektörü zamanla değişirken birim vektörlerin yönleri de zamanla değişir. Birim vektörlerin yön değiştirme hızını bulunuz.

Çözüm 3.3 Yer vektörü zamanla değiştiğinden, kutupsal koordinatlar zamanın fonksiyonudur: $r(t)$, $\theta(t)$. (3.36a) ile verilen $\mathbf{e}_r$ birim vektörün zamana göre değişim hızı

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\left(Cos\left[\theta(t)\right]\mathbf{i} + Sin\left[\theta(t)\right]\mathbf{j}\right)}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\left(-Sin\theta\mathbf{i} + Cos\theta\mathbf{j}\right)$$

elde edilir. $\frac{d\theta}{dt}$ açısal hız olup $\dot{\theta}$ ile gösterilir. $-Sin\theta\mathbf{i} + Cos\theta\mathbf{j}$, (3.36b)'de verilen $\mathbf{e}_\theta$ olduğunda

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\left(-Sin\theta\mathbf{i} + Cos\theta\mathbf{j}\right) = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

elde edilir. **i** ve **j** birim vektörleri sabit olup zamanla değişmezler. Fakat $\mathbf{e}_r$ birim vektörü, birim zamanda $\dot{\theta}$ hızı ile $\mathbf{e}_\theta$ birim vektörüne dönüşür. Benzer işlemler $\mathbf{e}_\theta$ için yapılırsa

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r$$

bulunur.

Örnek 3.4 Kutupsal koordinatlarda hız ve ivmenin bileşenlerini bulunuz.

Çözüm 3.4 Kutupsal koordinatlarda

$$\mathbf{r}(r,\theta) = rCos\theta\mathbf{i} + rSin\theta\mathbf{j}$$

ile verilen yer vektörünün zamana göre birinci türevi **v** hız vektörünü, ikinci türevi ise **a** ivme vektörünü verir. Önce hız vektörünü bulalım:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}(r,\theta)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(rCos\theta\ \mathbf{i} + rSin\theta\ \mathbf{j}\right)\\ &= \mathbf{i}\left[Cos\theta\ \frac{dr}{dt} + r\frac{dCos\theta}{dt}\right] + \mathbf{j}\left[Sin\theta\ \frac{dr}{dt} + r\frac{dSin\theta}{dt}\right]\end{aligned}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}\left[Cos\theta\ \frac{dr}{dt} - rSin\theta\frac{d\theta}{dt}\right] + \mathbf{j}\left[Sin\theta\ \frac{dr}{dt} + rCos\theta\frac{d\theta}{dt}\right]$$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\left[Cos\theta\mathbf{i}+Sin\theta\mathbf{j}\right] + r\dot{\theta}\ \left[-Sin\theta\mathbf{i}+Cos\theta\mathbf{j}\right]$$

Burada $\frac{dr}{dt} = \dot{r}$ ve $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ kısaltmaları kullanıldı. Birim vektörler cinsinde **v** hız vektörü

$$\mathbf{v}(r,\theta) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

olarak elde edilir. Hız vektörü, bileşenleri cinsinden $\mathbf{v} = v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta$ yapısında olduğundan radyal hız bileşeni $v_r = \dot{r}$ ve açısal hız bileşeni $v_\theta = r\dot{\theta}$ olarak bulunur. Şimdi **a** ivme vektörünü bulmak üzere yer vektörünün ikinci türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \frac{d^2\mathbf{r}(r,\theta)}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}(r,\theta)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta\right) \\
&= \mathbf{e}_r\frac{d\dot{r}}{dt} + \dot{r}\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta\frac{dr}{dt} + r\,\mathbf{e}_\theta\frac{d\dot{\theta}}{dt} + r\dot{\theta}\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}
\end{aligned}$$

olur. $\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt}$, $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt}$ kısaltmaları ve daha önce elde ettiğimiz $\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$ ve $\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r$ eşitlikleri kullanılırsa, **a** ivme vektörü birim vektörler cinsinde

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r \\
&= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta
\end{aligned}$$

olarak bulunur. İvme vektörü, bileşenleri cinsinden $\mathbf{a} = a_r\mathbf{e}_r + a_\theta\mathbf{e}_\theta$ yapısında olduğundan $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ ve $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$ bulunur.■

3.2.2 Silindirik Koordinat Sistemi

Kartezyen x, y, z koordinatlarıyla tanımlanan bir $P(x, y, z)$ noktası, şimdi $q_1 = \rho$, $q_2 = \phi$, $q_3 = z$ silindirik koordinatlar olarak bilinen üç yeni koordinatla gösterilecektir. Bir problemin geometrisinin silindirik olduğu durumlarda bu koordinat sistemi uygun olmaktadır. Silindirik koordinatlar ve birim vektörler Şekil 3.4a ve Şekil 3.4b'de verilmiştir.

Şekil 3.4a Silindirik koordinatlar

Şekil 3.4b Silindirik birim vektörler

Buna göre;

i. ρ; $P(x,y,z)$ noktasının xy düzlemine dik izdüşümün z eksenine olan uzaklığa,

ii. ϕ; $+x$ ekseninden ρ'ya saat ibresi tersine gidilerek ölçülen açıya,

iii. z; üçüncü kartezyen koordinata karşılık gelmektedir.

Bazı kaynaklarda ϕ yerine φ'nin kullanıldığını belirtelim. Bu konuda bir standart yoktur. Silindirik koordinat sisteminde $z = 0$ seçilirse kutupsal koordinatlara geçilebilir. Ancak $\rho \to r$ ve $\phi \to \theta$ değişikliğini yapmak gerekir.

Kartezyen (x, y, z) ile silindirik (ρ, ϕ, z) koordinatları arasında

$$x = x(\rho,\phi) = \rho Cos\phi \quad (3.37a)$$

$$y = y(\rho,\phi) = \rho Sin\phi \quad (3.37b)$$

$$z = z \quad (3.37c)$$

ilişkisi vardır. Ters dönüşümler ise şöyle elde edilir: x ve y koordinatlarının kareleri alınıp toplanırsa

$$x^2 + y^2 = (\rho Cos\phi)^2 + (\rho Sin\phi)^2 = \rho^2\left(Cos^2\phi + Sin^2\phi\right) = \rho^2$$

olur. Buradan ρ çözülürse

$$\rho = \rho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2},\ 0 \le \rho \le \infty \quad (3.38a)$$

elde edilir. $\frac{y}{x}$ oranından gerekli işlemler yapılırsa ϕ için

$$\phi = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right),\ 0 \le \phi \le 2\pi \quad (3.38b)$$

bulunur. z koordinatının ters dönüşümü kendisine eşittir.

$$z = z,\ -\infty \le z \le \infty \quad (3.38c)$$

x, y ve z verilirse silindirik koordinatlar tam olarak bulunur. Silindirik koordinatlarda konum vektörü

$$\mathbf{r}(\rho,\phi,z) = \rho Cos\phi\mathbf{i} + \rho Sin\phi\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (3.39)$$

şeklindedir. Silindirik koordinatlarda skala faktörlerini elde edelim. $q_1 = \rho$ için

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho} = \frac{\partial\left(\rho Cos\phi\mathbf{i} + \rho Sin\phi\mathbf{j} + z\mathbf{k}\right)}{\partial\rho} = Cos\phi\mathbf{i} + Sin\phi\mathbf{j}$$

$$g_{11} = h_1^2 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho} = Cos^2\phi + Sin^2\phi = 1$$

$$\Rightarrow h_1 = 1$$

$q_2 = \phi$ için

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \frac{\partial \left(\rho Cos\phi \mathbf{i} + \rho Sin\phi \mathbf{j} + z\mathbf{k}\right)}{\partial \phi} = -\rho Sin\phi \mathbf{i} + \rho Cos\phi \mathbf{j} \\
g_{22} &= h_2^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \rho^2 \left(Cos^2\phi + Sin^2\phi\right) = \rho^2 \\
&\Rightarrow h_2 = \rho
\end{aligned}$$

ve $q_3 = z$ için

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \frac{\partial \left(\rho Cos\phi \mathbf{i} + \rho Sin\phi \mathbf{j} + z\mathbf{k}\right)}{\partial z} = \mathbf{k} \\
g_{33} &= h_3^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \Rightarrow h_3 = 1
\end{aligned}$$

bulunur. Artık birim vektörleri bulabiliriz.

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_\rho = \widehat{\rho} = \frac{\partial \mathbf{r}/\partial \rho}{|\partial \mathbf{r}/\partial \rho|} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = Cos\phi \mathbf{i} + Sin\phi \mathbf{j} \qquad (3.40a)$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\phi = \widehat{\phi} = \frac{\partial \mathbf{r}/\partial \phi}{|\partial \mathbf{r}/\partial \phi|} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -Sin\phi \mathbf{i} + Cos\phi \mathbf{j} \qquad (3.40b)$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z = \widehat{z} = \frac{\partial \mathbf{r}/\partial z}{|\partial \mathbf{r}/\partial z|} = \frac{1}{h_3}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k} \qquad (3.40c)$$

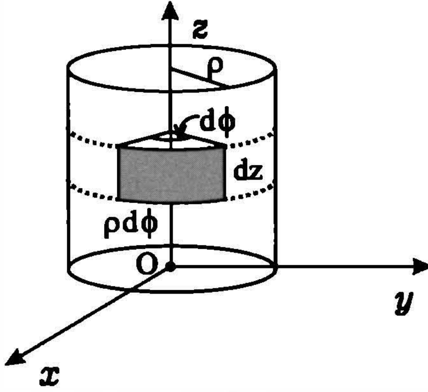
Birim vektörlerin $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ ve $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k$ bağıntılarını sağladıkları gösterilebilir. Yer vektörünün $\mathbf{r}(\rho, \phi, z) = \rho\left(Cos\phi \mathbf{i} + Sin\phi \mathbf{j}\right) + z\mathbf{e}_z = \rho\, \mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z$ şeklinde de yazılabileceğini belirtelim.

Silindirik koordinatlarda bazı nicelikler:

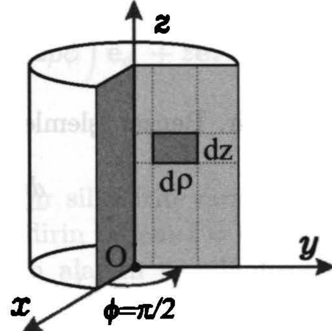
1. Yay elemanları: $ds_1 = d\rho,\ ds_2 = \rho d\phi,\ ds_3 = dz$
2. Yer vektörünün diferansiyeli: $d\mathbf{r} = d\rho \mathbf{e}_\rho + \rho d\phi \mathbf{e}_\phi + dz\mathbf{e}_z$
3. Yüzey elemanları:
   i. Silindirin yanal yüzeyi: $\rho = sabit,\ da_1 = ds_2 ds_3 = \rho d\phi dz$
   ii. Silindir eksenini içeren yüzey: $\phi = sabit,\ da_2 = ds_1 ds_3 = d\rho dz$
   iii. Silindirin taban/tavan yüzeyi: $z = sabit,\ da_3 = ds_1 ds_2 = \rho d\rho d\phi$
4. Hacim elemanı: $dV = ds_1 ds_2 ds_3 = \rho d\rho d\phi dz$

Silindirik koordinatlarda yüzey elemanları Şekil 3.5a, Şekil 3.5b ve Şekil

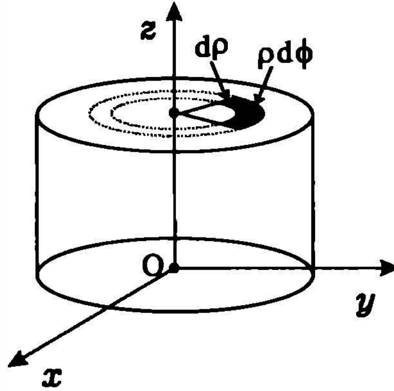
3.5c'de verilmiştir.



Şekil 3.5a $\rho = sabit$ yüzeyi



Şekil 3.5b $\phi = sabit$ yüzeyi



Şekil 3.5c $z = sabit$ yüzeyi

5. Gradyan: $\nabla f = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}$

6. Diverjans: $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_1) + \frac{\partial}{\partial \phi} A_2 + \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_3)\right]$

7. Rotasyonel: $\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho \mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & \rho A_2 & A_3 \end{vmatrix}$

8. Laplasiyen: $\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Örnek 3.5 Silindirik koordinatlarda hareket eden m kütleli bir cismi ele alalım. Cismin konum vektörü zamanla değişirken birim vektörlerin yönleri de zamanla değişir. Birim vektörlerin zamana göre değişimini bulunuz.

Çözüm 3.5 İlk olarak $\mathbf{e}_\rho$'nun zamanla değişimine bakalım. **i** ve **j** sabit kalırken ϕ açısı zamanla değişir. Buna göre

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} &= \frac{d}{dt}(Cos\phi \mathbf{i} + Sin\phi \mathbf{j}) = \mathbf{i}\frac{d}{dt}Cos\phi + \mathbf{j}\frac{d}{dt}Sin\phi \\ &= -\mathbf{i}Sin\phi\frac{d\phi}{dt} + \mathbf{j}Cos\phi\frac{d\phi}{dt} = (-Sin\phi \mathbf{i} + Cos\phi \mathbf{j})\frac{d\phi}{dt} \end{aligned}$$

olur. ϕ açısının zamanla değişimi $\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}$ açısal hızdır. Diğer yandan $-Sin\phi\mathbf{i}+Cos\phi\mathbf{j}$, (3.40b) ile verilen $\mathbf{e}_\phi$ olduğundan, $\mathbf{e}_\rho$'nun zamanla değişimi

$$\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} = \dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$$

olarak elde edilir. Benzer işlemler $\mathbf{e}_\phi$ için yapılırsa

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\mathbf{e}_\rho$$

bulunur. Son olarak $\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$'nın yönünün sabit kaldığını, dolayısıyla $\frac{d\mathbf{e}_z}{dt} = 0$ olduğunu belirtelim.

Örnek 3.6 Silindirik koordinatlarda hareket eden bir parçacığın hızının bileşenlerini bulunuz.

Çözüm 3.6 Silindirik koordinatlarda konum vektörü kartezyen birim vektörler cinsinden $\mathbf{r}(\rho, \phi, z) = \rho Cos\phi\mathbf{i}+\rho Sin\phi\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ ile verildiğini biliyoruz. Konum vektörünün zamana göre türevi, $\mathbf{v}$ hız vektörünü verir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho Cos\phi\mathbf{i} + \rho Sin\phi\mathbf{j}+z\mathbf{k}\right) \\
&= \mathbf{i}Cos\phi\frac{d\rho}{dt} + \mathbf{i}\rho\frac{dCos\phi}{dt} + \mathbf{j}Sin\phi\frac{d\rho}{dt} + \mathbf{j}\rho\frac{dSin\phi}{dt} + \mathbf{k}\frac{dz}{dt} \\
&= \left(Cos\phi\mathbf{i} + Sin\phi\mathbf{j}\right)\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(-Sin\phi\mathbf{i} + Cos\phi\mathbf{j}\right)\frac{d\phi}{dt} + \mathbf{k}\frac{dz}{dt}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{dz}{dt} = \dot{z}$, $\frac{d\rho}{dt} = \dot{\rho}$, $\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}$ alınır ve $Cos\phi\mathbf{i} + Sin\phi\mathbf{j} = \mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\phi = -Sin\phi\mathbf{i} + Cos\phi\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$ olduğu hatırlanırsa,$\mathbf{v}$ hız vektörü

$$\mathbf{v} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\mathbf{e}_z$$

olarak elde edilir. Buna göre hızın bileşenleri, $v_1 = v_\rho = \dot{\rho}$, $v_2 = v_\phi = \rho\dot{\phi}$ ve $v_3 = v_z = \dot{z}$'dir.

Örnek 3.7 Silindirik koordinatlarda ivme vektörünü bulunuz.

Çözüm 3.7 Hız vektörünün zamana göre türevi ivmeyi verir. Buna göre

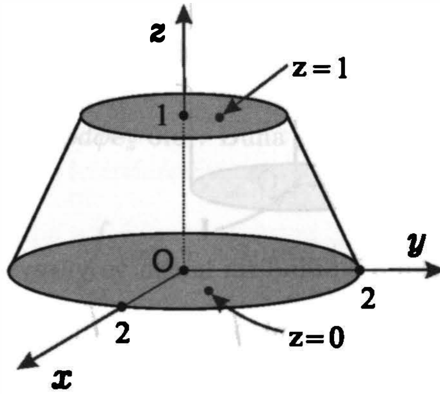
$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\mathbf{e}_z\right) \\
&= \mathbf{e}_\rho\frac{d\dot{\rho}}{dt} + \dot{\rho}\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} + \mathbf{e}_\phi\,\dot{\phi}\frac{d\rho}{dt} + \mathbf{e}_\phi\,\rho\frac{d\dot{\phi}}{dt} + \dot{\phi}\rho\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} + \mathbf{e}_z\frac{d\dot{z}}{dt}
\end{aligned}$$

$\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} = \dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$, $\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\mathbf{e}_\rho$, $\frac{d\dot{\rho}}{dt} = \ddot{\rho}$, $\frac{d\dot{\phi}}{dt} = \ddot{\phi}$ ve $\frac{d\dot{z}}{dt} = \ddot{z}$ olarak yerine yazılır ve düzenlenirse, ivme vektörü

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}\right)\mathbf{e}_\phi + \ddot{z}\mathbf{e}_z$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.8 Şekil 3.6'daki gibi verilen bir silindirin yarıçapı z'ye bağlı olarak $\rho = 2 - z$ ile değişmektedir. Bu silindirin tabanı $z = 0$, tavanı $z = 1$ düzlemleriyle sınırlanmıştır. Yanal yüzeyin alanını ve silindirin hacmini hesaplayın.



Şekil 3.6 Konik silindir

Çözüm 3.8 Silindirin yanal yüzey elemanının $da = \rho d\phi dz$ ile verildiğini biliyoruz. Yüzey elemanının integrali yüzeyi verir. Yüzeyi S ile gösterelim.

$$S = \int da = \int_{z=0}^{1} \rho dz \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = \int_{z=0}^{1} (2-z)dz \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi$$

$$S = \left[2z - \frac{z^2}{2}\right]_0^1 \left(\phi|_0^{2\pi}\right) = \left(2 - \frac{1}{2}\right) 2\pi = 3\pi$$

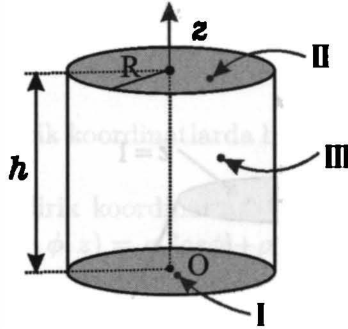
bulunur. Hacmi bulmak için $dV = \rho d\rho d\phi dz$ hacim elemanının integrali alınırsa

$$\begin{aligned} V &= \int dV = \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{z=0}^{1} dz \int_{\rho=2-z}^{2} \rho d\rho = 2\pi \int_{z=0}^{1} dz \int_{\rho=2-z}^{2} \rho d\rho \\ &= 2\pi \int_{z=0}^{1} \left(\frac{\rho^2}{2}\Big|_{2-z}^{2}\right) dz = 2\pi \int_{z=0}^{1} \left(\frac{4}{2} - \frac{(2-z)^2}{2}\right) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{z=0}^{1} \left(\frac{4z - z^2}{2} \right) dz = \pi \int_{z=0}^{1} \left(4z - z^2 \right) dz \\ &= \pi \left[2z^2 - \frac{z^3}{3} \right]_0^1 = \pi \left(2 - \frac{1}{3} \right) = \frac{5\pi}{3} \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3.9 $\mathbf{A} = \rho \mathbf{e}_\rho + \rho Sin\phi \mathbf{e}_\phi + z \mathbf{e}_z$ ve tabanı $z = 0$ düzleminde bulunan R yarıçaplı h yükseklikli silindir(Şekil 3.7) için diverjans teoremini doğrulayın.



Şekil 3.7 Silindirik hacim ve yüzeyi

Çözüm 3.9 Diverjans teoremi $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV$ idi. **A** vektör alanının bileşenleri $A_1 = \rho$, $A_2 = \rho Sin\phi$, $A_3 = z$ olduğundan

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2) + \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho Sin\phi) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho z) \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2) + \frac{\partial}{\partial \phi} (Sin\phi) + \frac{\partial}{\partial z} (z) \\ &= 2 + Cos\phi + 1 = 3 + Cos\phi \end{aligned}$$

bulunur. Silindirik koordinatlarda hacim elemanı $dV = \rho d\rho d\phi dz$ olduğundan teoremin sağ tarafı

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV &= \int_V (3 + Cos\phi) \rho d\rho d\phi dz \\ &= 3 \int_{\rho=0}^{R} \rho d\rho \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{z=0}^{h} dz + \int_{\rho=0}^{R} \rho d\rho \int_{\phi=0}^{2\pi} Cos\phi d\phi \int_{z=0}^{h} dz \\ &= 3 \left(\frac{\rho^2}{2} \bigg|_0^R \right) \left(\phi|_0^{2\pi} \right) \left(z|_0^h \right) + \left(\frac{\rho^2}{2} \bigg|_0^R \right) \left(Sin\phi|_0^{2\pi} \right) \left(z|_0^h \right) \\ &= 3 \frac{R^2}{2} 2\pi h + \frac{R^2}{2} (Sin 2\pi - Sin 0) h = 3\pi R^2 h \end{aligned}$$

olarak bulunur. $Sin2\pi = Sin0 = 0$ 'dan dolayı ikinci terimin sıfır olduğuna dikkat edelim. Silindirin kapalı yüzeyi taban, tavan ve yanal yüzeyden oluşmaktadır. Buna göre;

I nolu yüzey: $z = sabit = 0$, yüzey normalinin $-z$ yönünde olduğu dikkate alınırsa $\mathbf{da} = -\rho d\rho d\phi \mathbf{e}_z$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\int_I \mathbf{A}\cdot\mathbf{da} &= \int_I (\rho\mathbf{e}_\rho + \rho Sin\phi\mathbf{e}_\phi + z\mathbf{e}_z)\cdot(-\rho d\rho d\phi\mathbf{e}_z) \\ &= -z\int \rho d\rho d\phi == -(0)\int \rho d\rho d\phi = 0\end{aligned}$$

bulunur. z yerine sıfır yazıldığında integralin sıfır olduğuna dikkat edelim.

II nolu yüzey: $z = sabit = h$, yüzey normalinin $+z$ yönünde olduğu dikkate alınırsa $\mathbf{da} = \rho d\rho d\phi\mathbf{e}_z$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\int_{II} \mathbf{A}\cdot\mathbf{da} &= \int_{II} (\rho\mathbf{e}_\rho + \rho Sin\phi\mathbf{e}_\phi + h\mathbf{e}_z)\cdot(\rho d\rho d\phi\mathbf{e}_z) \\ &= h\int_{\rho=0}^{R} \rho d\rho \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = \pi R^2 h\end{aligned}$$

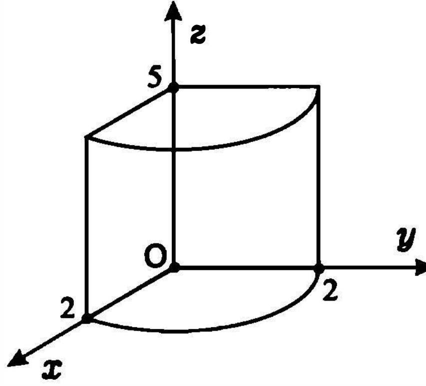
bulunur.

III nolu yüzey: $\rho = sabit = R$, yüzey normali $\mathbf{e}_\rho$ yönünde olduğundan $\mathbf{da} = Rd\phi dz\mathbf{e}_\rho$ şeklindedir. Buna göre

$$\begin{aligned}\int_{III} \mathbf{A}\cdot\mathbf{da} &= \int_{III} (R\mathbf{e}_\rho + RSin\phi\mathbf{e}_\phi + z\mathbf{e}_z)\cdot(Rd\phi dz\mathbf{e}_\rho) \\ &= R^2\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{z=0}^{h} dz = 2\pi R^2 h\end{aligned}$$

olarak bulunur. Üç yüzey için olan sonuçlar toplanırsa $\oint_S \mathbf{A}\cdot\mathbf{da} = 0 + \pi R^2 h + 2\pi R^2 h = 3\pi R^2 h$ bulunur. Böylece teorem doğrulandı.

Örnek 3.10



Şekil 3.8 Silindirik kesit

Şekil 3.8'de verilen silindirik yüzeyi ve $\mathbf{A} = \rho^2\ \mathbf{e}_\rho + \rho Cos\phi \mathbf{e}_\phi + z\mathbf{e}_z$ vektör alanını kullanarak diverjans teoremini doğrulayın.

Çözüm 3.10 **A** vektör alanının bileşenleri $A_1 = \rho^2$, $A_2 = \rho Cos\phi$, $A_3 = z$ olduğundan

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^3\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\rho Cos\phi\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho z\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^3\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(Cos\phi\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(z\right) = 3\rho - Sin\phi + 1$$

bulunur. Hacim bölgesinde $0 \le \rho \le 2$, $0 \le \phi \le \pi/2$ ve $0 \le z \le 5$ aralığında değer aldığından hacim integrali

$$\begin{aligned}\int_V (\nabla \cdot \mathbf{A})dV &= \int_V (3\rho - Sin\phi + 1)\rho d\rho d\phi dz \\ &= 3\int_{\rho=0}^{2} \rho^2 d\rho \int_{\phi=0}^{\pi/2} d\phi \int_{z=0}^{5} dz - \int_{\rho=0}^{2} \rho d\rho \int_{\phi=0}^{\pi/2} Sin\phi d\phi \int_{z=0}^{5} dz \\ &\quad + \int_{\rho=0}^{2} \rho d\rho \int_{\phi=0}^{\pi/2} d\phi \int_{z=0}^{5} dz = 20\pi - 10 + 5\pi = 25\pi - 10\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu örnekte silindirin kapalı yüzeyi beş kısımdan oluşmaktadır. Yüzey numaraları keyfi olup sonucu değiştirmez. Burada yüzeyler aşağıdaki gibi seçilmiştir:

I nolu yüzey(Taban): $z = sabit = 0$, $\mathbf{da} = -\rho d\rho d\phi \mathbf{e}_z$ olduğundan

$$\begin{aligned}\int_I \mathbf{A}\cdot \mathbf{da} &= \int_I \left(\rho^2\mathbf{e}_\rho + \rho Cos\phi\mathbf{e}_\phi + z\mathbf{e}_z\right)\cdot(-\rho d\rho d\phi\mathbf{e}_z)\\ &= -z\int\int \rho d\rho d\phi = -(0)\int\int \rho d\rho d\phi = 0\end{aligned}$$

bulunur.

II nolu yüzey(Tavan): $z = sabit = 5$, $\mathbf{da} = \rho d\rho d\phi \mathbf{e}_z$ alındığında

$$\begin{aligned}\int_{II} \mathbf{A}\cdot \mathbf{da} &= \int_{II} \left(\rho^2\mathbf{e}_\rho + \rho Cos\phi\mathbf{e}_\phi + 5\mathbf{e}_z\right)\cdot(\rho d\rho d\phi\mathbf{e}_z)\\ &= 5\int_{\rho=0}^{2} \rho d\rho \int_{\phi=0}^{\pi/2} d\phi = 5\left(\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^2\right)\left(\phi|_0^{\pi/2}\right) = 5\times\frac{4}{2}\times\frac{\pi}{2} = 5\pi\end{aligned}$$

olur.

III nolu yüzey(Yanal yüzey): $\rho = sabit = 2$, yüzey normali $\mathbf{e}_\rho$ yönündedir, $\mathbf{da} = 2d\phi dz\mathbf{e}_\rho$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}\int_{III} \mathbf{A}\cdot \mathbf{da} &= \int_{III} (4\mathbf{e}_\rho + 2Cos\phi\mathbf{e}_\phi + z\mathbf{e}_z)\cdot(2d\phi dz\mathbf{e}_\rho)\\ &= 8\int_{\phi=0}^{\pi/2} d\phi \int_{z=0}^{5} dz = 8\left(\phi|_0^{\pi/2}\right)\left(z|_0^5\right) = 8\times\frac{\pi}{2}\times 5 = 20\pi\end{aligned}$$

bulunur.

IV nolu yüzey(yz düzleminde kalan dikdörtgen yüzey): $\phi = sabit = \pi/2$, yüzey normalinin $\mathbf{e}_\phi$ yönünde olduğundan yüzey elemanı vektörü $\mathbf{da} = d\rho dz\mathbf{e}_\phi$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\int_{IV} \mathbf{A}\cdot \mathbf{da} &= \int_{IV} \left(\rho^2\mathbf{e}_\rho + \rho Cos\frac{\pi}{2}\mathbf{e}_\phi + z\mathbf{e}_z\right)\cdot d\rho dz\mathbf{e}_\phi\\ &= \int_{IV} \rho(0)d\rho dz = 0\end{aligned}$$

bulunur. Burada $Cos\frac{\pi}{2} = 0$ değeri kullanıldı. Son olarak;

V nolu yüzey(xz düzleminde kalan dikdörtgen yüzey): $\phi = sabit = 0$, bu kez yüzey normalinin $-\mathbf{e}_\phi$ yönünde olduğuna dikkat edelim. Buna göre

$d\mathbf{a} = -d\rho dz \mathbf{e}_\phi$ olur ve

$$\int_V \mathbf{A}\cdot d\mathbf{a} = \int_V \left(\rho^2\mathbf{e}_\rho + \rho Cos0\mathbf{e}_\phi + z\mathbf{e}_z\right)\cdot(-d\rho dz\mathbf{e}_\phi)$$

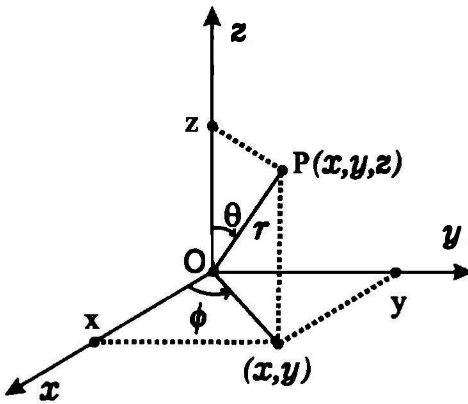
$$= -\int_V \rho d\rho dz = -\int_{\rho=0}^{2}\rho d\rho\int_{z=0}^{5} dz$$

$$= -\left(\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^2\right)\left(z|_0^5\right) = -\frac{4}{2}\times 5 = -10$$

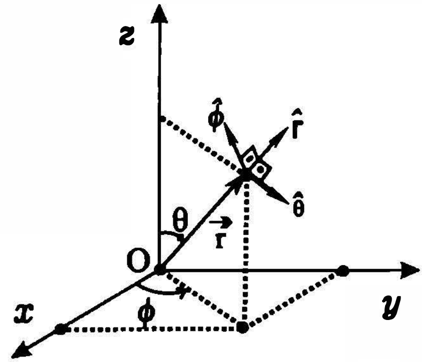
olarak hesaplanır. Tüm yüzeylerin katkısı toplanırsa $\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{a} = 0 + 5\pi + 20\pi + 0 - 10 = 25\pi - 10$ sonucu elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış oldu.■

3.2.3 Küresel Koordinat Sistemi

Kartezyen x, y, z koordinatlarıyla tanımlanan bir $P(x,y,z)$ noktasını, $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \phi$ küresel koordinatları ile $P(r,\theta,\phi)$ biçiminde işaretlemek istiyoruz. Küresel koordinatlar ve birim vektörler Şekil 3.9a ve 3.9b'de verilmiştir. Şekil 3.9a'dan görülebileceği üzere küresel koordinatlar aşağıdaki gibi tanımlanır:



Şekil 3.9a Küresel koordinatlar



Şekil 3.9b Küresel birim vektörler

i. r; $P(x,y,z)$ noktasının orijine olan uzaklığına,

ii. θ; $+z$ ekseninden r'ye saat ibresi yönünde gidilerek ölçülen açıya,

iii. ϕ; $+x$ ekseninden r'nin xy düzlemindeki dik izdüşümüne saat ibresi tersine gidilerek ölçülen açıya karşılık gelmektedir.

Kartezyen (x, y, z) ile küresel (r, θ, ϕ) koordinatları arasında

$$\begin{aligned} x &= x(r,\theta,\phi) = rSin\theta Cos\phi && (3.41a) \\ y &= y(r,\theta,\phi) = rSin\theta Sin\phi && (3.41b) \\ z &= z(r,\theta) = rCos\theta && (3.41c) \end{aligned}$$

ilişkisi vardır. Burada z'nin ϕ'ye bağlı olmadığını belirtelim.

Ters dönüşümlere bakalım. İlkin, x, y ve z koordinatlarının kareleri alınıp toplanırsa

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (rSin\theta Cos\phi)^2 + (rSin\theta Sin\phi)^2 + (rCos\theta)^2 \\ &= r^2 Sin^2\theta \left(Cos^2\phi + Sin^2\phi\right) + r^2 Cos^2\theta \\ &= r^2\left(Sin^2\theta + Cos^2\theta\right) = r^2 \end{aligned}$$

olur. Burada $Cos^2\phi + Sin^2\phi = 1$ ve $Sin^2\theta + Cos^2\theta = 1$ eşitlikleri kullanıldı. Buradan r çözülürse

$$r = r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad 0 \le r \le \infty \qquad (3.42a)$$

elde edilir. İkinci olarak, $\frac{y}{x}$ oranından gerekli işlemler yapılırsa ϕ için

$$\phi = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \quad 0 \le \phi \le 2\pi \qquad (3.42b)$$

bulunur. Son olarak (3.41c)'den θ çözülürse

$$\theta = Cos^{-1}\left(\frac{z}{r}\right), \quad 0 \le \theta \le \pi \qquad (3.42c)$$

bulunur. Herhangi bir noktanın x,y,z koordinatları verilirse r, θ ve ϕ koordinatları tam olarak bulunur.

Küresel koordinatlarda konum vektörü $\mathbf{r}(r,\theta,\phi)$; $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ birim vektörler cinsinden

$$\mathbf{r}(r,\theta,\phi) = rSin\theta Cos\phi\mathbf{i} + rSin\theta Sin\phi\mathbf{j} + rCos\theta\mathbf{k} \qquad (3.43)$$

olarak elde edilir. Küresel koordinatlarda skala faktörlerini bulalım: $q_1 = r$ için,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_1} &= \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = \frac{\partial\left(rSin\theta Cos\phi\mathbf{i} + rSin\theta Sin\phi\mathbf{j} + rCos\theta\mathbf{k}\right)}{\partial r} \\ &= Sin\theta Cos\phi\mathbf{i} + Sin\theta Sin\phi\mathbf{j} + Cos\theta\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{11} &= h_1^2 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = Sin^2\theta\left(Cos^2\phi + Sin^2\phi\right) + Cos^2\theta \\ h_1^2 &= Sin^2\theta + Cos^2\theta = 1 \Rightarrow h_1 = 1 \end{aligned}$$

$q_2 = \theta$ için,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial \left(rSin\theta Cos\phi \mathbf{i} + rSin\theta Sin\phi \mathbf{j} + rCos\theta \mathbf{k}\right)}{\partial \theta}$$
$$= rCos\theta Cos\phi \mathbf{i} + rCos\theta Sin\phi \mathbf{j} - rSin\theta \mathbf{k}$$

$$g_{22} = h_2^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r^2 Cos^2\theta \left(Cos^2\phi + Sin^2\phi\right) + r^2 Sin^2\theta$$
$$h_2^2 = r^2 \left(Cos^2\theta + Sin^2\theta\right) = r^2 \Rightarrow h_2 = r$$

ve $q_3 = \phi$ için,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = \frac{\partial \left(rSin\theta Cos\phi \mathbf{i} + rSin\theta Sin\phi \mathbf{j} + rCos\theta \mathbf{k}\right)}{\partial \phi}$$
$$= -rSin\theta Sin\phi \mathbf{i} + rSin\theta Cos\phi \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$g_{33} = h_3^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = r^2 Sin^2\theta Sin^2\phi + r^2 Sin^2\theta Cos^2\phi$$
$$h_3^2 = r^2 Sin^2\theta \left(Sin^2\phi + Cos^2\phi\right) = r^2 Sin^2\theta \Rightarrow h_3 = rSin\theta$$

bulunur. Küresel koordinatlarda birim vektörler

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r = \widehat{r} = \frac{\partial \mathbf{r}/\partial r}{|\partial \mathbf{r}/\partial r|} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}$$
$$= Sin\theta Cos\phi \mathbf{i} + Sin\theta Sin\phi \mathbf{j} + Cos\theta \mathbf{k} \qquad (3.44a)$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta = \widehat{\theta} = \frac{\partial \mathbf{r}/\partial \theta}{|\partial \mathbf{r}/\partial \theta|} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}$$
$$= Cos\theta Cos\phi \mathbf{i} + Cos\theta Sin\phi \mathbf{j} - Sin\theta \mathbf{k} \qquad (3.44b)$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_\phi = \widehat{\phi} = \frac{\partial \mathbf{r}/\partial \phi}{|\partial \mathbf{r}/\partial \phi|} = \frac{1}{h_3}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -Sin\phi \mathbf{i} + Cos\phi \mathbf{j} \qquad (3.44c)$$

olarak bulunur. Birim vektörlerin skaler ve vektörel çarpımları için $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ ve $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k$ bağıntılarının sağlandığı gösterilebilir. Burada ε_{ijk} Levi-Civita tensörüdür. Yer vektörü, $\mathbf{e}_r$ cinsinden

$$\mathbf{r}(r,\theta,\phi) = r\left(Sin\theta Cos\phi \mathbf{i} + Sin\theta Sin\phi \mathbf{j} + Cos\theta \mathbf{k}_z\right) = r\mathbf{e}_r$$

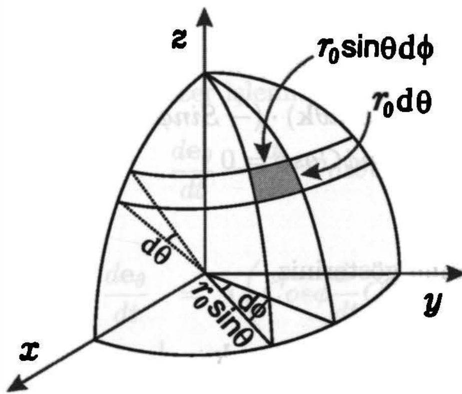
şeklindedir.

Küresel koordinatlarda bazı nicelikler:

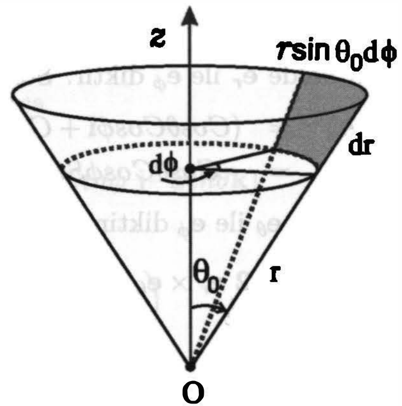
1.Yay elemanları:	$ds_1 = dr$, $ds_2 = rd\theta$, $ds_3 = rSin\theta d\phi$
2.Yer vektörünün diferansiyeli:	$d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + rd\theta\mathbf{e}_\theta + rSin\theta d\phi\mathbf{e}_\phi$
3.Yüzey elemanları:	
i. Kürenin dış yüzeyi	$r = r_0$, $da_1 = ds_2 ds_3 = r_0^2 Sin\theta d\theta d\phi$
ii. Koni yüzeyi	$\theta = \theta_0$, $da_2 = ds_1 ds_3 = Sin\theta_0 r dr d\phi$
iii. z eksenini içeren yüzey	$\phi = \phi_0$, $da_3 = ds_1 ds_2 = r dr d\theta$

4. Hacim elemanı: $dV = ds_1 ds_2 ds_3 = r^2 dr Sin\theta d\theta d\phi$
5. Gradyan: $\nabla f = \mathbf{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{rSin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}$
6. Diverjans: $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 Sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 Sin\theta A_1\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(rSin\theta A_2\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(rA_3\right)\right]$
7. Rotasyonel: $\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 Sin\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & rSin\theta \mathbf{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_1 & rA_2 & rSin\theta A_3 \end{vmatrix}$
8. Laplasiyen: $\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 Sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(Sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 Sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$

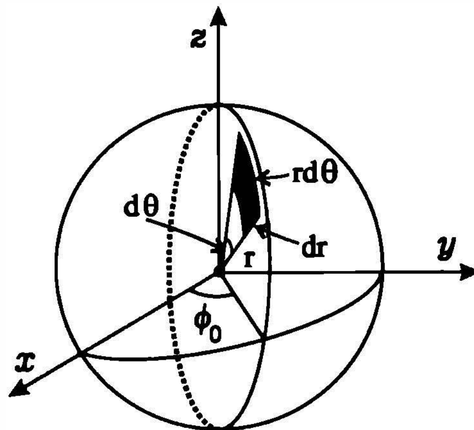
Küresel koordinatlarda yüzey elemanları Şekil 3.10a, Şekil 3.10b ve Şekil 3.10c'de verilmiştir.



Şekil 3.10a $r = sabit$ yüzeyi



Şekil 3.10b $\theta = sabit$ yüzeyi



Şekil 3.10c $\phi = sabit$ yüzeyi

Örnek 3.11 Küresel koordinatlarda birim vektörlerin dik olduklarını gösteriniz.

Çözüm 3.11 İlk olarak $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta$ skaler çarpımına bakalım. Kartezyen birim vektörler için $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$, diğer çarpımlar sıfır olduğundan

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta &= (Sin\theta Cos\phi\mathbf{i} + Sin\theta Sin\phi\mathbf{j} + Cos\theta\mathbf{k}) \\
&\quad \cdot (Cos\theta Cos\phi\mathbf{i} + Cos\theta Sin\phi\mathbf{j} - Sin\theta\mathbf{k}) \\
&= Sin\theta Cos\theta Cos^2\phi + Sin\theta Cos\theta Sin^2\phi - Cos\theta Sin\theta \\
&= Sin\theta Cos\theta\left(Cos^2\phi + Sin^2\phi\right) - Cos\theta Sin\theta \\
&= Sin\theta Cos\theta - Cos\theta Sin\theta = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç; $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = 0$ olduğundan $\mathbf{e}_r$ ile $\mathbf{e}_\theta$ diktir. İkinci olarak $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\phi$ çarpımı

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\phi &= (Sin\theta Cos\phi\mathbf{i} + Sin\theta Sin\phi\mathbf{j} + Cos\theta\mathbf{k}) \cdot (-\,Sin\phi\mathbf{i} + Cos\phi\mathbf{j}) \\
&= -Sin\theta Cos\phi\; Sin\phi + Sin\theta Sin\phi Cos\phi = 0
\end{aligned}$$

olur. O halde $\mathbf{e}_r$ ile $\mathbf{e}_\phi$ diktir. Son olarak $\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\phi$ çarpımı

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\phi &= (Cos\theta Cos\phi\mathbf{i} + Cos\theta Sin\phi\mathbf{j} - Sin\theta\mathbf{k}) \cdot (-\,Sin\phi\mathbf{i} + Cos\phi\mathbf{j}) \\
&= -Cos\theta Cos\phi Sin\phi + Cos\theta Sin\phi Cos\phi = 0
\end{aligned}$$

olduğundan $\mathbf{e}_\theta$ ile $\mathbf{e}_\phi$ diktir.

Örnek 3.12 $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\phi$ olduğunu gösteriniz.
Çözüm 3.12

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ Sin\theta Cos\phi & Sin\theta Sin\phi & Cos\theta \\ Cos\theta Cos\phi & Cos\theta Sin\phi & -Sin\theta \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{i}\left(-Sin^2\theta Sin\phi - Cos^2\theta Sin\phi\right) + \mathbf{j}\left(Cos^2\theta Cos\phi + Sin^2\theta Cos\phi\right) \\
&\quad + \mathbf{k}\left(Sin\theta Cos\theta Sin\phi Cos\phi - Sin\theta Cos\theta Sin\phi Cos\phi\right) \\
&= -\mathbf{i}Sin\phi(Sin^2\theta + Cos^2\theta) + \mathbf{j}Cos\phi(Cos^2\theta + Sin^2\theta) + 0\mathbf{k} \\
&= -Sin\phi\mathbf{i} + Cos\phi\mathbf{j} = \mathbf{e}_\phi
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3.13 Küresel koordinatlarda birim vektörlerin zamanla değişimini bulunuz.

Çözüm 3.13 İlk olarak $\mathbf{e}_r$'nin zamanla değişimine bakalım. $\mathbf{i}$ ve $\mathbf{j}$ sabit kalırken θ ve ϕ açısı zamanla değişir. Buna göre

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(Sin\theta Cos\phi\;\mathbf{i} + Sin\theta Sin\phi\;\mathbf{j} + Cos\theta\;\mathbf{k}\right) \\
&= \mathbf{i}\left(Cos\phi\frac{d}{dt}Sin\theta + Sin\theta\frac{d}{dt}Cos\phi\right) \\
&\quad + \mathbf{j}\left(Sin\phi\frac{d}{dt}Sin\theta + Sin\theta\frac{d}{dt}Sin\phi\right) + \mathbf{k}\frac{d}{dt}Cos\theta
\end{aligned}$$

$$= \mathbf{i}\left(Cos\theta Cos\phi\frac{d\theta}{dt} - Sin\theta Sin\phi\frac{d\phi}{dt}\right)$$
$$+\mathbf{j}\left(Cos\theta Sin\phi\frac{d\theta}{dt} + Sin\theta Cos\phi\frac{d\phi}{dt}\right) - \mathbf{k}Sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

olur. Ortak parantezler kullanılırsa

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = (Cos\theta Cos\phi\mathbf{i}+Cos\theta Sin\phi\mathbf{j}-Sin\theta\mathbf{k})\frac{d\theta}{dt} + Sin\theta\,(-Sin\phi\mathbf{i}+Cos\phi\mathbf{j})\frac{d\phi}{dt}$$

bulunur. $Cos\theta Cos\phi\mathbf{i}+Cos\theta Sin\phi\mathbf{j}-Sin\theta\mathbf{k} = \mathbf{e}_\theta$, $-Sin\phi\mathbf{i}+Cos\phi\mathbf{j} = \mathbf{e}_\phi$ yerine yazılır ve $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$, $\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}$ gösterimleri kullanılırsa

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + Sin\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$$

elde edilir. Benzer işlemler $\mathbf{e}_\theta$ için yapılırsa

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(Cos\theta Cos\phi\mathbf{i} + Cos\theta Sin\phi\,\mathbf{j}-Sin\theta\mathbf{k})$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = \mathbf{i}\left(Cos\phi\frac{d}{dt}Cos\theta + Cos\theta\frac{d}{dt}Cos\phi\right)$$
$$+\mathbf{j}\left(Sin\phi\frac{d}{dt}Cos\theta + Cos\theta\frac{d}{dt}Sin\phi\right) - \mathbf{k}\frac{d}{dt}Sin\theta$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = \mathbf{i}\left(-Sin\theta Cos\phi\frac{d\theta}{dt} - Cos\theta Sin\phi\frac{d\phi}{dt}\right)$$
$$+\mathbf{j}\left(-Sin\theta Sin\phi\frac{d\theta}{dt} + Cos\theta Cos\phi\frac{d\phi}{dt}\right) - \mathbf{k}Cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -(Sin\theta Cos\phi\mathbf{i}+Sin\theta Sin\phi\mathbf{j}+Cos\theta\mathbf{k})\frac{d\theta}{dt} + Cos\theta\,(-Sin\phi\mathbf{i}+Cos\phi\mathbf{j})\frac{d\phi}{dt}$$
$$= -\dot{\theta}\mathbf{e}_r + Cos\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$$

elde edilir. Son olarak $\mathbf{e}_\phi$ için işlem yapılırsa

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = \frac{d}{dt}(-Sin\phi\mathbf{i} + Cos\phi\mathbf{j})$$
$$= -\mathbf{i}Cos\phi\frac{d\phi}{dt} - \mathbf{j}Sin\phi\frac{d\phi}{dt}$$
$$= -(Cos\phi\mathbf{i}+Sin\phi\mathbf{j})\frac{d\phi}{dt} = -(Cos\phi\mathbf{i}+Sin\phi\mathbf{j})\dot{\phi}$$

bulunur. Burada $Cos\phi\mathbf{i}+Sin\phi\mathbf{j}$ çarpanı tek başına herhangi bir birim vektöre karşı gelmediğinden, iki birim vektör cinsinden bulmak istiyoruz. Bunun için (3.44a) ile verilen $\mathbf{e}_r$ 'yi $Sin\theta$ ile ve (3.44b) ile verilen $\mathbf{e}_\theta$ 'yı $Cos\theta$ ile çarpalım ve taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{aligned} Sin\theta\mathbf{e}_r &= Sin^2\theta\; Cos\phi\mathbf{i} + Sin^2\theta\; Sin\phi\mathbf{j} + Sin\theta Cos\theta\mathbf{k} \\ &= Sin^2\theta\,(Cos\phi\mathbf{i} + Sin\phi\mathbf{j})\; + Sin\theta Cos\theta\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cos\theta\mathbf{e}_\theta &= Cos^2\theta Cos\phi\mathbf{i} + Cos^2\theta Sin\phi\mathbf{j} - Sin\theta\; Cos\theta\mathbf{k} \\ &= Cos^2\theta\,(Cos\phi\mathbf{i} + Sin\phi\mathbf{j})\; - Sin\theta\; Cos\theta\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Sin\theta\mathbf{e}_r + Cos\theta\mathbf{e}_\theta &= (Cos\phi\mathbf{i} + Sin\phi\mathbf{j})\left(Sin^2\theta + Cos^2\theta\right) + 0\mathbf{k} \\ &= (Cos\phi\mathbf{i} + Sin\phi\mathbf{j}) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $Cos\phi\mathbf{i}+Sin\phi\mathbf{j}$'nin yerine yukarıda bulunan özdeşi yazılırsa, $\mathbf{e}_\phi$'nin zamanla değişimi için

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = -Sin\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_r - Cos\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\theta$$

elde edilir.

Örnek 3.14 Küresel koordinatlarda hareket eden bir parçacığın hız bileşenlerini bulunuz.

Çözüm 3.14 Konum vektörünün zamana göre türevi $\mathbf{v}$ hız vektörünü verir. Küresel koordinatlarda konum vektörü $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ olduğundan

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_r) \\ &= \mathbf{e}_r\frac{dr}{dt} + r\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \end{aligned}$$

olur. Burada daha önce elde ettiğimiz $\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + Sin\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$ eşitliğini yerine yazar ve $\frac{dr}{dt} = \dot{r}$ gösterimini kullanırsak

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + rSin\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$$

olarak elde edilir. Küresel koordinatlarda hız vektörü $\mathbf{v} = v_r\mathbf{e}_r + v_\theta\mathbf{e}_\theta + v_\phi\mathbf{e}_\phi$ yapısında olduğu göz önüne alınırsa, hızın bileşenlerinin

$$v_r = \dot{r},\; v_\theta = r\dot{\theta},\; v_\phi = rSin\theta\dot{\phi}$$

olduğu anlaşılır. Özel olarak parçacık küre yüzeyinde hareket ederse $r = r_0 = sabit$ ve $\dot{r} = 0$ olur. Böylece hız $\mathbf{v} = r_0\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r_0 Sin\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$ biçiminde iki boyuta indirgenir.

Örnek 3.15 Küresel koordinatlarda hareket eden m kütleli bir parçacığın kinetik enerji ifadesini bulunuz.

Çözüm 3.15 m kütleli bir parçacığın kinetik enerjisi $T = \frac{1}{2}mv^2$ ile tanımlanır. $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} v^2 &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \left(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + rSin\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi\right)\cdot\left(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + rSin\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi\right) \\ v^2 &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2Sin^2\theta\dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece küresel koordinatlarda kinetik enerji

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2Sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)$$

şeklindedir.

Örnek 3.16 Küresel koordinatlarda ivme vektörünü bulunuz.

Çözüm 3.16 Hız vektörünün zamana göre türevi ivmeyi verir. Türev için çarpım kuralı uygulanırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + rSin\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi\right) \\ &= \mathbf{e}_r\frac{d\dot{r}}{dt} + \dot{r}\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \mathbf{e}_\theta\,\dot{\theta}\frac{dr}{dt} + \mathbf{e}_\theta\,r\frac{d\dot{\theta}}{dt} + r\dot{\theta}\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} \\ &+\mathbf{e}_\phi\,Sin\theta\dot{\phi}\frac{dr}{dt} + \mathbf{e}_\phi\,r\dot{\phi}\frac{dSin\theta}{dt} + \mathbf{e}_\phi\,rSin\theta\frac{d\dot{\phi}}{dt} \\ &+rSin\theta\dot{\phi}\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} \end{aligned}$$

yazılabilir. Daha $\frac{d\mathbf{e}_r}{dt}$, $\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}$, $\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt}$ için elde ettiğimiz nicelikler yerine yazılır, $\frac{d\dot{r}}{dt} = \ddot{r}$, $\frac{d\dot{\phi}}{dt} = \ddot{\phi}$ ve $\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \ddot{\theta}$ temsilleri kullanılırsa

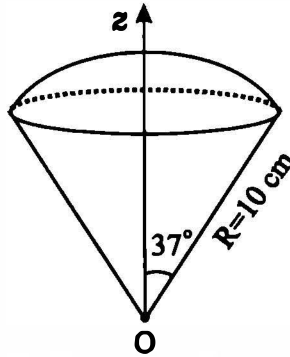
$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\left(\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + Sin\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi\right) + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta \\ &+r\dot{\theta}\left(-\dot{\theta}\mathbf{e}_r + Cos\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi\right) + \dot{r}Sin\theta\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi \\ &+r\dot{\theta}Cos\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + rSin\theta\ddot{\phi}\mathbf{e}_\phi + rSin\theta\dot{\phi}\left(-Sin\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_r - Cos\theta\dot{\phi}\mathbf{e}_\theta\right) \end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen terimler $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ ve $\mathbf{e}_\phi$ ortak parantezinde düzenlenirse, ivme vektörü

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - rSin^2\theta\dot{\phi}^2\right)\mathbf{e}_r \\ &+ \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - rSin\theta Cos\theta\dot{\phi}^2\right)\mathbf{e}_\theta \\ &+ \left(2\dot{r}Sin\theta\dot{\phi} + 2r\dot{\theta}Cos\theta\dot{\phi} + rSin\theta\ddot{\phi}\right)\mathbf{e}_\phi\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.17



Şekil 3.11 Konik cisim

Şekil 3.11'de görüldüğü gibi $R = 10$ cm yarıçaplı bir kürenin $\theta = 37^0$'ye kadar olan kısmını göz önüne alın. Bu geometrik cismin yüzey alanını ve hacmini hesaplayın.

Çözüm 3.17 Cisim iki yüzeye sahiptir: Koni yüzeyi ve küresel kubbe parçası(içinde dondurma bulunan külah gibi). Koninin yüzeyinde $\theta = sabit = 37^0$ olup yüzey elemanı $da_1 = Sin37^0 rdrd\phi$ şeklindedir. Yüzey elemanının integrali yüzeyi verir. $Sin37^0 = 0.6$, $Cos37^0 = 0.8$ alınarak

$$a_1 = 0.6\int_{r=0}^{10} rdr \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = 0.6\left(\left.\frac{r^2}{2}\right|_0^{10}\right)\left(\phi|_0^{2\pi}\right) = 0.6 \times \frac{100}{2} \times 2\pi = 60\pi \text{ cm}^2$$

bulunur. İkinci yüzey $r = sabit = 10$ cm olan kürenin dış yüzeyinden bir parçadır. Yüzey elemanı $da_2 = r^2 Sin\theta d\theta d\phi$ olduğundan

$$\begin{aligned}a_2 &= 100\int_{\theta=0}^{37^0} Sin\theta d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = 100\left(-Cos\theta|_0^{37}\right)\left(\phi|_0^{2\pi}\right) \\ &= -100\left(Cos37 - Cos0\right)2\pi = -200\pi\left(0.8 - 1\right) \\ &= -200\pi\left(-0.2\right) = 40\pi \text{ cm}^2\end{aligned}$$

bulunur. Toplam yüzey alanı $a_1 + a_2 = 100\pi$ cm^2 olur. Hacmi bulmak için $dV = r^2 dr Sin\theta d\theta d\phi$ hacim elemanın integrali alınırsa

$$V = \int_{r=0}^{10} r^2 dr \int_{\theta=0}^{37^0} Sin\theta d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi$$

$$= \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{10} \left(-Cos\theta|_0^{37}\right) \phi|_0^{2\pi} = \frac{1000}{3} \times 0.2 \times 2\pi = \frac{400}{3}\pi \text{ cm}^3$$

bulunur.

Örnek 3.18 Bir $+q$ yükünden r kadar uzakta bir noktadaki elektrik alanı $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathbf{e}_r$ ile verilir. Burada ε_0 boşluğun elektriksel alan geçirgenliğidir. Küresel koordinatlarda elektrik alanın diverjansını hesaplayınız.

Çözüm 3.18 Küresel koordinatlarda $\mathbf{E} = E_r\mathbf{e}_r + E_\theta\mathbf{e}_\theta + E_\phi\mathbf{e}_\phi$ biçiminde verilen bir alanın diverjansı

$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2 Sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 Sin\theta E_r\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(r Sin\theta E_\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(r E_\phi\right)\right]$ ile hesaplanır.

Örneğimizde $E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$, $E_\theta = E_\phi = 0$ olduğundan

$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2 Sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 Sin\theta E_r\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right)$ biçiminde kısalır. E_r yerine yazılırsa

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{1}{r^2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(0) = 0,\ r \neq 0 \text{ ise}$$

olur. Yani yükün bulunduğu nokta hariç elektrik alanın diverjansı $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ oluyor. Bu doğrudur. Çünkü diverjans uzayın bir noktasında bir kaynağın olup olmadığını söyler. Burada elektrik alanın kaynağı noktasal yükün kendisidir ve o yük $r = 0$'da bulunmaktadır. $r \to 0$ limitinde $\nabla \cdot \mathbf{E} \to \frac{0}{0}$ belirsizliği oluşmaktadır. Bu durumda $\nabla \cdot \mathbf{E}$'yi bulmanın bir yolunu bulmalıyız. Bu problemi diverjans teoremi yardımı ile giderebiliriz. $\mathbf{E}$ alanı için diverjans teoremi

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E})\, dV$$

şeklindedir. Bu teoreme göre $\nabla \cdot \mathbf{E}$'nin hacim integrali, özdeş olarak yükü saran kapalı yüzeyden geçen akıya eşittir. Şimdi $+q$ yükünü, merkezinde yükün olduğu r yarıçaplı küresel bir yüzeyle kapatalım ve yüzeyden geçen

elektrik akısını hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} &= \oint_S \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\mathbf{e}_r\right)\cdot\left(r^2 Sin\theta d\theta d\phi \mathbf{e}_r\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{r^2 Sin\theta d\theta d\phi}{r^2} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\theta=0}^{\pi} Sin\theta d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-Cos\theta|_0^{\pi}\right)\left(\phi|_0^{2\pi}\right) \\
&= \frac{q}{\pi\varepsilon_0 4}(-Cos\pi + Cos0)2\pi = \frac{q}{\pi\varepsilon_0 4}\times 4\pi.
\end{aligned}$$

Bu sonuç $\int_V (\nabla\cdot\mathbf{E})\,dV$'ye eşit olmalıdır yani;

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\times 4\pi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \left(\nabla\cdot\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r\right) dV$$

olmalıdır. Bu eşitlikten

$$\int_V \nabla\cdot\left(\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r\right) dV = 4\pi$$

olması gerektiği anlaşılır. $\nabla\cdot\left(\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r\right)$ için öyle bir sonuç bulmalıyız ki hacim integrali $r \neq 0$'da sıfır, $r = 0$ iken 4π olsun. Bu daha önce incelediğimiz Dirac-Delta fonksiyonudur: $\delta^3(\mathbf{r})$. Dirac-Delta fonksiyonunun 4π fonksiyonu ile çarpımının integralinden yararlanarak

$$\int_V \nabla\cdot\left(\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r\right) dV = \int_V 4\pi\delta^3(\mathbf{r})dV$$

yazılabilir. Buradan

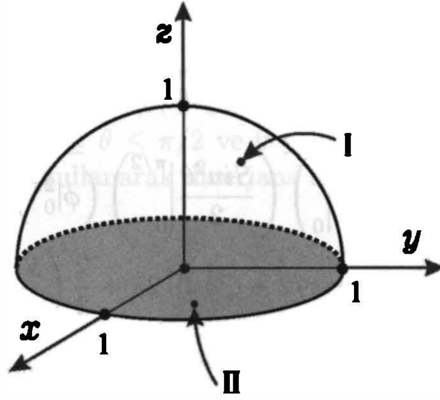
$$\nabla\cdot\left(\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r\right) = 4\pi\delta^3(\mathbf{r}) \tag{3.45}$$

olduğu sonucuna ulaşılır. Bu eşitliğin her iki tarafını $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}$ ile çarparsak, $+q$ yüküne ait elektrik alanının diverjansı

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r\right) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi\delta^3(\mathbf{r}) \\
&= \frac{q}{\varepsilon_0}\delta^3(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.19 $\mathbf{F} = r\mathbf{e}_r + Sin\theta\mathbf{e}_\theta + rSin\theta Cos\phi\mathbf{e}_\phi$ vektör alanını kullanarak Şekil 3.12'deki gibi verilen $R = 1$ yarıçaplı kürenin $z = 0$ düzleminin üstünde kalan kısmı için diverjans teoremini doğrulayın.



Şekil 3.12 Yarım küre

Çözüm 3.19 $\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV$ şeklinde verilen diverjans teoreminin önce sağ tarafını ele alalım. Vektör alanın bileşenleri $F_1 = F_r = r$, $F_2 = F_\theta = Sin\theta$ ve $F_3 = F_\phi = rSin\theta Cos\phi$'dir. Buna göre

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{1}{r^2 Sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 Sin\theta\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(rSin^2\theta\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(r^2 Sin\theta Cos\phi\right)\right] \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\right) + \frac{1}{rSin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(Sin^2\theta\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(Cos\phi\right) \\
&= \frac{1}{r^2}3r^2 + \frac{1}{rSin\theta}2Sin\theta Cos\theta - Sin\phi \\
&= 3 + \frac{2Cos\theta}{r} - Sin\phi
\end{aligned}$$

bulunur. Küresel koordinatlarda hacim elemanı $dV = r^2 drSin\theta d\theta d\phi$ olduğundan

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV = \int_V \left(3 + \frac{2Cos\theta}{r} - Sin\phi\right) r^2 drSin\theta d\theta d\phi$$

$$= 3\int_{r=0}^{1} r^2 dr \int_{\theta=0}^{\pi/2} Sin\theta d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi + 2\int_{r=0}^{1} rdr \int_{\theta=0}^{\pi/2} Cos\theta Sin\theta d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi$$

$$-\int_{r=0}^{1} r^2 dr \int_{\theta=0}^{\pi/2} Sin\theta d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} Sin\phi d\phi$$

biçiminde yazılabilir. $\int\limits_{\phi=0}^{2\pi} Sin\phi d\phi = 0$ olduğundan üçüncü integral sıfır olur. Birinci ve ikinci integraller hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\int\limits_V (\nabla\cdot\mathbf{F})\,dV &= 3\left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^1\right)\left(-Cos\theta|_0^{\pi/2}\right)\left(\phi|_0^{2\pi}\right)\\ &+2\left(\frac{r^2}{2}\Big|_0^1\right)\left(\frac{Sin^2\theta}{2}\Big|_0^{\pi/2}\right)\left(\phi|_0^{2\pi}\right)\\ &= \frac{3}{3}(-Cos\pi/2+Cos0)\,2\pi+\frac{2}{2}\left(\frac{Sin^2\pi/2}{2}-\frac{Sin^2 0}{2}\right)2\pi\end{aligned}$$

olur. $Cos(\pi/2) = Sin0 = 0$ ve $Sin(\pi/2) = 1$ olduğundan

$$\int\limits_V (\nabla\cdot\mathbf{F})\,dV = 2\pi+\pi = 3\pi$$

olur. Teoremin sol tarafına bakalım. Burada yarım kürenin iki yüzeyle kapatıldığını görüyoruz. Bunlar;

I nolu yüzey(Kubbe) için : $R = sabit = 1$, $d\mathbf{a}_1 = R^2 Sin\theta d\theta d\phi \mathbf{e}_r$ ve kubbe yüzeyinde $\mathbf{F} = R\mathbf{e}_r + Sin\theta\mathbf{e}_\theta + RSin\theta Cos\phi\mathbf{e}_\phi$ olduğundan

$$\begin{aligned}\int\limits_{Kubbe} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a}_1 &= \int\limits_{Kubbe} (R\mathbf{e}_r + Sin\theta\mathbf{e}_\theta + RSin\theta Cos\phi\mathbf{e}_\phi)\cdot R^2 Sin\theta d\theta d\phi\mathbf{e}_r\\ &= \int\limits_{Kubbe} (1)^3 Sin\theta d\theta d\phi = \int\limits_{\theta=0}^{\pi/2} Sin\theta d\theta \int\limits_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = 1\times 2\pi = 2\pi\end{aligned}$$

bulunur.

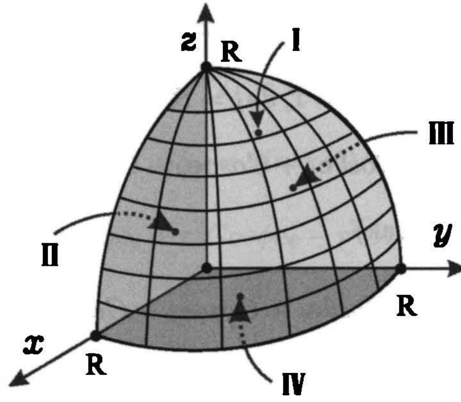
II nolu yüzey(Taban) için: $\theta = sabit = \pi/2$, $d\mathbf{a}_2 = Sin(\pi/2) r dr d\phi \mathbf{e}_\theta = r dr d\phi\mathbf{e}_\theta$ ve tabanda $\mathbf{F} = r\mathbf{e}_r + Sin(\pi/2)\mathbf{e}_\theta + rSin(\pi/2)Cos\phi\mathbf{e}_\phi$ olduğundan

$$\begin{aligned}\int\limits_{Taban} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a}_2 &= \int\limits_{Taban} \left(r\mathbf{e}_r + Sin(\frac{\pi}{2})\mathbf{e}_\theta + rSin(\frac{\pi}{2})Cos\phi\mathbf{e}_\phi\right)\cdot r dr d\phi\mathbf{e}_\theta\\ &= \int\limits_{Taban} Sin(\frac{\pi}{2}) r dr d\phi = Sin(\frac{\pi}{2})\int\limits_{r=0}^{1} r dr \int\limits_{\phi=0}^{2\pi} d\phi\\ &= (1)\times\left(\frac{r^2}{2}\Big|_0^1\right)\left(\phi|_0^{2\pi}\right) = 1\times\frac{1}{2}\times 2\pi = \pi\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\oint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} = \int_{Kubbe} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a}_1 + \int_{Taban} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a}_2 = 2\pi + \pi = 3\pi$ olur.

Sonuç: $\oint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} = \int_V (\nabla\cdot\mathbf{F})\,dV = 3\pi$ olduğundan teorem ispatlanmış olur.

Örnek 3.20 $\mathbf{A} = r^2 Cos\theta\mathbf{e}_r + r^2 Cos\phi\mathbf{e}_\theta - r^2 Cos\theta Sin\phi\mathbf{e}_\phi$ vektör alanını ve Şekil 3.13'teki gibi $0 \le \theta \le \pi/2$ ve $0 \le \phi \le \pi/2$ ile sınırlanan $R = 1$ yarıçaplı küre dilimini kullanarak diverjans teoremini doğrulayın.



Şekil 3.13 Küresel dilim

Çözüm 3.20 $A_r = r^2 Cos\theta$, $A_\theta = r^2 Cos\phi$ ve $A_\phi = -r^2 Cos\theta Sin\phi$ vektör bileşenleri

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2 Sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 Sin\theta A_r\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(r Sin\theta A_\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(r A_\phi\right)\right]$$

ile verilen diverjans ifadesinde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{A} &= \frac{1}{r^2 Sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 Sin\theta r^2 Cos\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(r Sin\theta r^2 Cos\phi\right)\right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(-r r^2 Cos\theta Sin\phi\right)\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{r^2 Sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4 Sin\theta Cos\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(r^3 Sin\theta Cos\phi\right) - \frac{\partial}{\partial\phi}\left(r^3 Cos\theta Sin\phi\right)\right]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{Cos\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^4\right) + \frac{r Cos\phi}{Sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Sin\theta\right) - \frac{r Cos\theta}{Sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(Sin\phi\right) \\ &= \frac{Cos\theta}{r^2}4r^3 + \frac{r Cos\phi}{Sin\theta}Cos\theta - \frac{r Cos\theta}{Sin\theta}Cos\phi = 4r Cos\theta\end{aligned}$$

elde edilir. $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$ ve $0 \leq r \leq R$ değerleri için $\nabla \cdot \mathbf{A}$'nın hacim integrali alınırsa

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{A})\, dV = \int_V 4r^3 dr Sin\theta Cos\theta d\theta d\phi = 4 \int_{r=0}^{1} r^3 dr \int_{\theta=0}^{\pi/2} Sin\theta Cos\theta d\theta \int_{\phi=0}^{\pi/2} d\phi$$

$$= 4 \left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^1 \right) \left(\frac{Sin^2\theta}{2}\Big|_0^{\pi/2} \right) \left(\phi|_0^{\pi/2} \right) = 4 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

bulunur. Şekil 3.13'teki gibi seçilen yüzeyler için yüzey integralleri aşağıdaki gibidir:

I nolu yüzeyde(Kubbe): $R = 1$, $\mathbf{da}_1 = R^2 Sin\theta d\theta d\phi \mathbf{e}_r$ ve kubbe yüzeyinde

$$\mathbf{A} = R^2 \left(Cos\theta \mathbf{e}_r + Cos\phi \mathbf{e}_\theta - Cos\theta Sin\phi \mathbf{e}_\phi \right)$$

olduğundan($R = 1$ alınarak)

$$\begin{aligned} \int_{Kubbe} \mathbf{A} \cdot \mathbf{da}_1 &= \int_{Kubbe} (Cos\theta \mathbf{e}_r + Cos\phi \mathbf{e}_\theta - Cos\theta Sin\phi \mathbf{e}_\phi) \cdot Sin\theta d\theta d\phi \mathbf{e}_r \\ &= \int_{Kubbe} Sin\theta Cos\theta d\theta d\phi = \int_{\theta=0}^{\pi/2} Sin\theta Cos\theta d\theta \int_{\phi=0}^{\pi/2} d\phi \\ &= \left(\frac{Sin^2\theta}{2}\Big|_0^{\pi/2} \right) \left(\phi|_0^{\pi/2} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

bulunur.

II nolu yüzeyde: $\phi = 0$, $\mathbf{da}_2 = -r dr d\theta \mathbf{e}_\phi$ ve bu yüzeyde

$$\mathbf{A} = r^2 Cos\theta \mathbf{e}_r + r^2 Cos0 \mathbf{e}_\theta - r^2 Cos\theta Sin0 \mathbf{e}_\phi$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \int_{II} \mathbf{A} \cdot \mathbf{da}_2 &= -\int_{II} \left(r^2 Cos\theta \mathbf{e}_r + r^2 \mathbf{e}_\theta + 0 \mathbf{e}_\phi \right) \cdot r dr d\theta \mathbf{e}_\phi \\ &= -\int_{II} (0) r dr d\theta = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $Sin0 = 0$ ve $Cos0 = 1$ değerleri kullanılmıştır.

III nolu yüzeyde: $\phi = \pi/2$, $\mathbf{da}_3 = r dr d\theta \mathbf{e}_\phi$ ve bu yüzeyde

$$\mathbf{A} = r^2 Cos\theta \mathbf{e}_r + r^2 Cos(\pi/2) \mathbf{e}_\theta - r^2 Cos\theta Sin(\pi/2) \mathbf{e}_\phi$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\int_{III} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{a}_3 &= \int_{III} \left(r^2 Cos\theta \mathbf{e}_r + (0)\mathbf{e}_\theta + -r^2 Cos\theta \mathbf{e}_\phi\right)\cdot rdrd\theta \mathbf{e}_\phi \\ &= -\int_{III} r^3 dr Cos\theta d\theta = -\int_{r=0}^{1} r^3 dr \int_{\theta=0}^{\pi/2} Cos\theta d\theta \\ &= \left(-\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1\right)\left(Sin\theta|_0^{\pi/2}\right) = -\frac{1}{4}\times 1 = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Burada $Cos(\pi/2) = 0$ ve $Sin(\pi/2) = 1$ değerleri kullanılmıştır.

IV nolu yüzeyde: $\theta = \pi/2$, $d\mathbf{a}_4 = Sin(\pi/2) rdrd\phi \mathbf{e}_\theta$ ve bu yüzeyde

$$\mathbf{A} = r^2 Cos(\pi/2)\mathbf{e}_r + r^2 Cos\phi \mathbf{e}_\theta - r^2 Cos(\pi/2) Sin\phi \mathbf{e}_\phi$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\int_{IV} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{a}_4 &= \int_{IV} \left(0\mathbf{e}_r + r^2 Cos\phi \mathbf{e}_\theta + 0\mathbf{e}_\phi\right)\cdot rdrd\phi \mathbf{e}_\theta \\ &= \int_{IV} r^3 dr Cos\phi d\phi = \int_{r=0}^{1} r^3 dr \int_{\phi=0}^{\pi/2} Cos\phi d\phi \\ &= \left(\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^1\right)\left(Sin\phi|_0^{\pi/2}\right) = \frac{1}{4}\times 1 = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

bulunur. Tüm yüzeylerin katkısı toplanırsa

$$\oint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} = \frac{\pi}{4} + 0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$$

elde edilir. $\oint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{a} = \int_V (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})\, dV = \frac{\pi}{4}$ olduğundan teorem ispatlanmış oldu.

Örnek 3.21 R yarıçaplı küreyi kullanarak $\frac{1}{3}\oint_S \mathbf{r}\cdot d\mathbf{a} = V$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm 3.21 $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ yer vektörünün R yarıçaplı küre yüzeyinden geçirdiği akı

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{r}\cdot d\mathbf{a} &= \oint_S (R\mathbf{e}_r)\cdot\left(R^2 Sin\theta d\theta d\phi \mathbf{e}_r\right) = R^3\int_{\theta=0}^{\pi} Sin\theta d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \\ &= R^3\left(-Cos\theta|_0^{\pi}\right)\left(\phi|_0^{2\pi}\right) = R^3\times 2\times 2\pi = 4\pi R^3\end{aligned}$$

olur. Her iki tarafı $\frac{1}{3}$ ile çarpalım

$$\frac{1}{3}\oint_S \mathbf{r}\cdot d\mathbf{a} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

bulunur. R yarıçaplı kürenin hacmi $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ olduğundan

$$\frac{1}{3}\oint_S \mathbf{r}\cdot d\mathbf{a} = V$$

sonucu elde edilmiş olur.

Örnek 3.22a) xy düzleminde $\mathbf{v}$ hızıyla hareket eden m kütleli bir parçacığın $\mathbf{L}$ açısal momentum vektörünü bulun. **b)** $\mathbf{L}$ açısal momentum vektörünü silindirik koordinatlarda ifade edin.

Çözüm 3.22a) $\mathbf{P} = m\mathbf{v}$ olmak üzere açısal momentum $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{P}$ ile verilir. xy düzlemindeki bir parçacığın yer vektörü $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ve hızı

$$\mathbf{v} = \frac{d(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})}{dt} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}$$

olur. Bunları $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{P}$'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= m(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})\times\left(\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}\right) \\ &= m(x\dot{y} - y\dot{x})\mathbf{k}\end{aligned}$$

elde edilir.

b) Silindirik koordinatlarıda $x = \rho Cos\phi$, $y = \rho Sin\phi$ olduğundan

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d(\rho Cos\phi)}{dt} = \dot{\rho}Cos\phi - \rho\dot{\phi}Sin\phi$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{d(\rho Sin\phi)}{dt} = \dot{\rho}Sin\phi + \rho\dot{\phi}Cos\phi$$

olarak elde edilir. $x\dot{y}$ ve $y\dot{x}$ terimleri

$$x\dot{y} = \rho Cos\phi\left(\dot{\rho}Sin\phi + \rho\dot{\phi}Cos\phi\right) = \rho\dot{\rho}Cos\phi Sin\phi + \rho^2\dot{\phi}Cos^2\phi$$

$$y\dot{x} = \rho Sin\phi\left(\dot{\rho}Cos\phi - \rho\dot{\phi}Sin\phi\right) = \rho\dot{\rho}Sin\phi Cos\phi - \rho^2\dot{\phi}Sin^2\phi$$

bulunur. Silindirik koordinatlarda $\mathbf{k} = \mathbf{e}_z$ olduğundan açısal momentum vektörü

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= m(x\dot{y} - y\dot{x})\mathbf{k} \\
&= m\left(\rho\dot{\rho}Cos\phi Sin\phi + \rho^2\dot{\phi}Cos^2\phi - \rho\dot{\rho}Sin\phi Cos\phi + \rho^2\dot{\phi}Sin^2\phi\right)\mathbf{e}_z \\
&= m\rho^2\dot{\phi}\left(Sin^2\phi + Cos^2\phi\right)\mathbf{e}_z = m\rho^2\dot{\phi}\mathbf{e}_z
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.23a) Küresel koordinatlarda $\mathbf{r}\times\nabla$ vektörel çarpımını elde edin. **b)** Kuantum mekaniğinde $\mathbf{L} = -i\hbar\mathbf{r}\times\nabla$ ile verilen açısal momentum işlemcisini bulunuz. Burada i kompleks sayı, $\hbar$ Plank sabitidir. **c)** Açısal momentumun z bileşeni L_z'yi elde edin.

Çözüm 3.23a) Küresel koordinatlarda $\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r$ ve $\nabla = \mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial\rho} + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e}_\phi\frac{1}{rSin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$ ifadeleri kullanılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}\times\nabla &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_\phi \\ r & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{1}{rSin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \end{vmatrix} = \mathbf{e}_r\left((0)\frac{1}{rSin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} - (0)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&\quad + \mathbf{e}_\theta\left((0)\frac{\partial}{\partial r} - (r)\frac{1}{rSin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) + \mathbf{e}_\phi(r)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - (0)\frac{\partial}{\partial r} \\
&= -\mathbf{e}_\theta\frac{1}{Sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} + \mathbf{e}_\phi\frac{\partial}{\partial\theta}
\end{aligned}$$

elde edilir. **b)** **a** şıkkında bulunan sonuç $-i\hbar$ ile çarpılırsa

$$\mathbf{L} = -i\hbar\mathbf{r}\times\nabla = i\hbar\left(\mathbf{e}_\theta\frac{1}{Sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} - \mathbf{e}_\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

bulunur. **c)** Açısal momentumun z bileşenini bulmak için $\theta = \pi/2$ alalım. Bu özel durumda $\mathbf{e}_\theta$ ve $\mathbf{e}_\phi$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_\theta &= Cos(\pi/2)Cos\phi\mathbf{i} + Cos(\pi/2)Sin\phi\mathbf{j} - Sin(\pi/2)\mathbf{k} = -\mathbf{k} \\
\mathbf{e}_\phi &= -Sin\phi\,\mathbf{i} + Cos\phi\,\mathbf{j}
\end{aligned}$$

olur. Burada $Cos(\pi/2) = 0$, $Sin(\pi/2) = 1$ değerleri kullanılırsa, $\mathbf{L}$ için

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= -i\hbar\mathbf{r}\times\nabla = i\hbar\left(-\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\phi} - (-Sin\phi\mathbf{i} + Cos\phi\mathbf{j})\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&= i\hbar\left(\mathbf{i}Sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \mathbf{j}Cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\
&= \mathbf{i}\left[i\hbar Sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\right] + \mathbf{j}\left[-i\hbar Cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta}\right] + \mathbf{k}\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\right]
\end{aligned}$$

bulunur. L operatörünün etki edeceği(kısmi türev alacağı) skaler fonksiyon $f(\theta,\phi)$, θ ve ϕ 'nin fonksiyonudur. Ancak $\theta = sabit$ olması durumunda f sadece ϕ'nin fonksiyonu olur. Bu nedenle ilk iki terimde $\frac{\partial f(\phi)}{\partial\theta} = 0$ olacağından sadece

$$\mathbf{L} = \mathbf{k}\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

terimi kalır. **k** birim vektöründen dolayı, bu açısal momentumun z bileşenidir. Böylece

$$\mathbf{L}_z = L_z\mathbf{k} = \mathbf{k}\left[-i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\right] \Rightarrow L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$$

olarak elde edilir.■

BÖLÜM SONU PROBLEMLERİ

3.1 **i**, **j**, **k** kartezyen birim vektörlerin $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\phi$, $\mathbf{e}_z$ silindirik birim vektörler cinsinden

$$\begin{aligned}\mathbf{i} &= Cos\phi\mathbf{e}_\rho - Sin\phi\mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{j} &= Sin\phi\mathbf{e}_\rho + Cos\phi\mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{k} &= \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

ile verilebileceğini gösterin. *İpucu:* (3.40a)'nın iki tarafını $Cos\phi$, (3.30b)'nin iki tarafını $Sin\phi$ ile çarpın sonra taraf tarafa toplayın(çıkarın).

3.2 Silindirik birim vektörler için

$$\frac{\partial\mathbf{e}_\rho}{\partial\phi} = \mathbf{e}_\phi \text{ ve } \frac{\partial\mathbf{e}_\phi}{\partial\phi} = -\mathbf{e}_\rho$$

olduğunu gösterin.

3.3 **i**, **j**, **k** kartezyen birim vektörlerin $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\phi$ küresel birim vektörler cinsinden

$$\mathbf{i} = Sin\theta Cos\phi\mathbf{e}_r + Cos\theta Cos\phi\mathbf{e}_\theta - Sin\phi\mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{j} = Sin\theta Sin\phi\mathbf{e}_r + Cos\theta Sin\phi\mathbf{e}_\theta + Cos\phi\mathbf{e}_\phi$$

$$\mathbf{k} = Cos\theta\mathbf{e}_r - Sin\theta\mathbf{e}_\theta$$

ile verilebileceğini gösterin.

3.4 $\frac{\partial\mathbf{i}}{\partial\phi} = -\mathbf{j}$ ve $\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial\phi} = \mathbf{i}$ olduğunu gösterin.

3.5a) $\varphi(x,y,z) = \frac{xy}{x^2+y^2+z^2}$ skaler alanını küresel koordinatlarda elde edin. $\varphi(r,\theta,\phi) =?$ **b)** Kartezyen koordinatlarda $\nabla_{xyz}\varphi(x,y,z)$ ile küresel koordinatlarda $\nabla_{r\theta\phi}\varphi(r,\theta,\phi)$'nin özdeş olduğunu gösterin.

3.6 Küresel koordinatlarda bir yük dağılımının potansiyeli

$$\varphi(r,\theta,\phi) = -Aln(r) - BSin\phi$$

ile verilmektedir. Burada A ve B sabitlerdir. Elektrik alanını $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ işlemini yaparak bulunuz.

3.7 Silindir biçimindeki uzun bir malzemenin içinde

$$\mathbf{M} = kr^2\mathbf{e}_\phi$$

mıknatıslanması vardır. Burada k pozitif bir sabittir. Hacimsel bağlı yük yoğunluğunu, $\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M}$ işlemini yaparak bulun. *Cevap:* $3kr\mathbf{e}_z$

3.8 Küresel koordinatlarda bir manyetik dipolun vektör potansiyeli

$$\mathbf{A}(r) = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\frac{Sin\theta}{r^2}\mathbf{e}_\phi$$

ile verilmektedir. Burada μ_0 boşluğun manyetik alan geçirgenliği, m ise manyetik dipol momentidir. **B** manyetik alanını, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ işlemini yaparak bulun.
Cevap: $\frac{\mu_0 m}{4\pi}\left(2Cos\theta\mathbf{e}_r + Sin\theta\mathbf{e}_\theta\right)$

3.9 $\mathbf{A}(\rho,\phi,z) = \rho Sin\phi\theta\mathbf{e}_\rho + \rho^2\mathbf{e}_\phi + z\mathbf{e}_z$ vektör alanın rotasyonelini hesaplayın. *Cevap:*$(3\rho - Cos\phi)\,\mathbf{e}_z$

3.10 $\mathbf{F}(r,\theta,\phi) = r^2Cos\theta\mathbf{e}_r + r^2Cos\phi\mathbf{e}_\theta - r^2Cos\theta Sin\phi\mathbf{e}_\phi$ vektör alanın rotasyonelini bulunuz.
Cevap: $2rSin\theta Sin\phi\mathbf{e}_r + 3rCos\theta Sin\phi\mathbf{e}_\theta + (3rCos\phi + rSin\theta)\,\mathbf{e}_\phi$

3.11 $\mathbf{V}(\rho,\phi,z) = \rho^3Sin\phi Cos\phi\mathbf{e}_\rho + 2z^2\mathbf{e}_z$ vektör alanı veriliyor. Tabanı $z = 0$ ve tavanı $z = 1$ düzlemleriyle sınırlandırılmış $\rho = 1$ yarıçaplı silindiri kullanarak diverjans teoremini doğrulayın. *Cevap:* 2π

3.12 Küresel koordinatlar için

$$J\left(\frac{x,y,z}{q_1,q_2,q_3}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix}$$

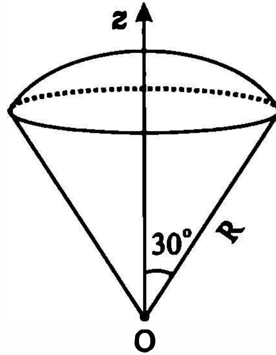
Jakobiyenini bulun. Burada | |, 3×3'lük matrisin determinantıdır.

3.13 $\mathbf{A}(r,\theta,\phi) = rSin\theta\mathbf{e}_r + Sin\theta\mathbf{e}_\theta + 3r\mathbf{e}_\phi$ vektör alanının Şekil 3.12'de verilen yarım küreden geçirdiği Φ akısını

a) $\Phi = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$ yüzey integralini hesaplayarak,

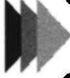
b) $\Phi = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A})\, dV$ hacim integralini alarak bulun. Sonuçların eşit olduğunu gösterin. *Cevap:* $\pi\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$

3.14 $\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = r^2 Sin\theta \mathbf{e}_r + 4r^2 Cos\theta \mathbf{e}_\theta + r^2 tan\theta \mathbf{e}_\phi$ vektör alanını ve Şekil 3.14'te verilen R yarıçaplı koniyi kullanarak diverjans teoremini doğrulayın.



Şekil 3.14 Konik hacim ve yüzeyi

Cevap: $\frac{\pi R^4}{12}\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)$



BÖLÜM 4 MATRİSLER

Bu bölümde, fiziğin pek çok alanında bir araç olarak kullanılan matrisleri ele alacağız. Matrislerin toplanması, çıkarılması ve çarpımı gibi temel matris cebrini örneklerle açıklayacağız. Bir matrisin transpozu, determinantı, izi kavramlarını verdikten sonra, tersini iki ayrı yöntemle elde edeceğiz. Daha sonra özelliklerine göre matrisleri sınıflandırarak bu bölümü tamamlayacağız.

Matris; satır ve sütun düzeni içinde yazılmış sayılardan oluşan iki boyutlu bir sayı dizisidir. Söz konusu sayılar ( ) veya [ ] şeklindeki bir parantezin içine yazılır. Sayılar reel veya kompleks olabilir. Her matrisin bir ismi vardır. İsimlendirmede bir standart yoktur. Biz matris ismi olarak küçük veya büyük harfleri üzerlerinde herhangi işaret olmaksızın, yalın olarak kullanacağız.

Genel olarak m tane satırı ve n tane sütunu olan bir A matrisi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

biçiminde yazılır. Burada $i = 1,2,3,...,m$ satır ve $j = 1,2,3...,n$ sütun numarası olmak üzere a_{ij} , A matrisinin elemanlarıdır. A matrisini $A = (a_{ij})_{m\times n}$ şeklinde yazmak mümkündür. Satır ve sütun sayısı eşit olan matrislere karesel matris denir.

Karesel iki özel matris

1. Birim matris:

Köşegen elemanları 1, diğer tüm elemanları 0 olan matrise birim matris denir. Birim matris I ile gösterilir. 3×3 boyutlu birim matris

$$I = (\delta_{ij})_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

şeklindedir.

2. Sıfır matrisi:

Tüm elemanları 0 olan matristir. 3×3 boyutlu sıfır matrisi

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

biçimindedir.

4.1 Temel Matris Cebri

Bu kesimde matrislerin toplanması, çıkarılması ve çarpımını vereceğiz.

4.1.1 Matrislerin Toplanması

İki matrisin toplanabilmesi için boyutlarının aynı olması, yani satır ve sütun sayılarının eşit olması şarttır. Bu şartı sağlamayan iki matris toplanamaz. Aynı boyutlu iki matris $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ve $B = (b_{ij})_{m\times n}$ olmak üzere, A ile B matrislerinin toplamı

$$A + B = (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} \tag{4.4}$$

biçiminde olur. Yani iki matrisin aynı satır ve aynı sütununda bulunan elemanlar cebirsel olarak toplanarak, toplam matrisin aynı adresteki elemanları elde edilir.

Örnek 4.1 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ matrislerini sembolik olarak toplayın.

Çözüm 4.1 Aynı satır ve aynı sütundaki elemanlar toplanırsa
$A + B = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$ elde edilir.

Örnek 4.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrislerini toplayın.

Çözüm 4.2 Aynı adresteki matris elemanları toplanırsa

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+3 & 0+2 & -1-2 \\ -1+4 & 2-1 & 0+2 \\ 1+1 & 3+0 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur.

Matris toplamının özellikleri:
i. Matris toplamının değişme özelliği vardır.
$A + B = B + A$

ii. Bir matrisin, sıfır matrisi ile toplamı kendisine eşittir.
$A + 0 = 0 + A = A$

iii. Boyutları aynı olan ikiden fazla matris toplanabilir. İşlem sırası önemli değildir.
$(A + B) + C = A + (B + C)$

4.1.2 Matrislerin Çıkarılması

Aynı boyutlu iki matrisin çıkarılması, toplanmasına benzerdir. Sadece elemanların toplanması yerine çıkarılması söz konusudur. Çıkarma işleminin değişme özelliği yoktur. Ancak bir işaret farkıyla $A - B = -(B - A)$ eşitliği yazılabilir. $A - B = 0$ ise bu matrisler eşittir: $A = B$. Bu durum şöyle de ifade edilebilir. A matrisinin elemanları a_{ij}, B matrisinin elemanları b_{ij} olsun. Eğer her i, j için $a_{ij} = b_{ij}$ eşitliği sağlanıyorsa A matrisi B matrisine eşittir.

Örnek 4.3 Örnek 4.2'de verilen A ve B matrisleri için $A - B$ ve $B - A$ işlemlerini yapınız.

Çözüm 4.3 Önce A matrisinden B matrisi çıkarılırsa

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-3 & 0-2 & -1-(-2) \\ -1-4 & 2-(-1) & 0-2 \\ 1-1 & 3-0 & 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -5 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

bulunur. Şimdi B matrisinden A matrisini çıkarılırsa

$$B - A = \begin{pmatrix} 3-1 & 2-0 & -2-(-1) \\ 4-(-1) & -1-2 & 2-0 \\ 1-1 & 0-3 & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi çıkarma işleminde değişme özelliği yoktur.■

4.1.3 Matrislerde Çarpma İşlemi

Üç çeşit çarpım vardır: Bir matrisin bir skalerle çarpımı, iki matrisin iç çarpımı ve direk çarpım. A matrisini bir α skaleri ile çarpmak demek, A matrisinin her bir elemanını α skaleri ile çarpmak demektir.

$$\alpha\, A = (\alpha\, a_{ij}) \tag{4.5}$$

A matrisi 3×3'lük bir matris olsun. Bu durumda

$$\alpha\, A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{pmatrix}$$

olur.

A ve B matrislerinin AB sırasına göre iç çarpılabilmesi için A matrisinin sütun sayısının, B matrisinin satır sayısına eşit olması zorunludur. Başka bir kısıtlama yoktur. Genel olarak $A_{n\times s}$ matrisi n satırlı ve s sütünlu bir matris ve $B_{s\times m}$ matrisi s satırlı ve m sütünlu bir matris ise, A ve B matrisinin çarpımı sonucu n satırlı m sütunlu bir C matrisi elde edilir: $A_{n\times s}B_{s\times m} = C_{n\times m}$. Çarpma işlemi

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj} \quad i = 1, 2, ..., n \quad j = 1, 2, ..., m \tag{4.6}$$

kuralına göre yapılır. Buna göre C matrisinin i. satır j. sütun elemanını bulmak için, A matrisinin i. satır k. sütun elemanı ile B matrisinin k. satır j. sütunundaki elemanı çarpılır. $k = 1, 2, ..., s$ oluncaya kadar değiştirilerek elde edilen çarpımlar toplanır. Böylece c_{ij} matris elemanı bulunur. C matrisinin tüm elemanlarını bulmak için $i = 1, 2, ..., n$ ve $j = 1, 2, ..., m$ oluncaya kadar işlem tekrarlanır.

Örnek 4.4 $A_{2\times3} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ ve $B_{3\times2} = \begin{pmatrix} g & k \\ h & l \\ \imath & m \end{pmatrix}$ matrislerini çarparak $C_{2\times2}$ matrisini elde edin.

Çözüm 4.4 İşlemler yapılırsa C matrisi

$$C = AB = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & k \\ h & l \\ \imath & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ag + bh + c\imath & ak + bl + cm \\ dg + eh + f\imath & dk + el + fm \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 4.5 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisleri veriliyor. AB ve BA çarpımlarını bulun.

Çözüm 4.5 İşlem yapılırsa AB çarpımı

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3\times0+2\times1+1\times2 & 3\times2+2\times1+1\times1 & 3\times1+2\times1+1\times1 \\ 1\times0+0\times1+1\times2 & 1\times2+0\times1+1\times1 & 1\times1+0\times1+1\times1 \\ 2\times0+1\times1+1\times2 & 2\times2+1\times1+1\times1 & 2\times1+1\times1+1\times1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Benzer işlemler BA için yapılırsa

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

elde edilir. $AB \neq BA$ olduğuna dikkat edelim.■

Matris çarpımı için aşağıdaki özellikler verilebilir:
i. Özel bazı matrisler hariç, genel olarak AB ve BA çarpımları farklıdır.
$AB \neq BA$.
ii. Eğer $[A, B]$ ile gösterilen $AB - BA = 0$ ise A ve B matrisleri sıra değiştiriyor yada komüte ediyor denir. Bu durumda AB çarpımı ile BA çarpımı eşittir.
iii. İkiden fazla matrisin çarpımdaki sırası değiştirilmedikçe, yapılacak çarpım önceliği sonucu değiştirmez.
$(AB)C = A(BC)$.
iv. Çarpımın toplama üzerine dağılma özelliği vardır.
$A(B + C) = AB + AC$.
v. Çarpım kuralının sağlanması şartıyla bir matrisin I birim matris ile çarpımı kendisine eşittir.
$AI = IA = A$.
vi. Bir skalerin matris temsilini bulmak için, o skaleri uygun boyutlu birim matrisle çarpmak yeterli olur. 2×2'lik bir matris için

$$\alpha I = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

elde edilir.
vii. Bir matrisin kuvvetini bulmak için, kuvvetin derecesi kadar çarpma yapılır. $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$ gibi.

İç çarpımdan farklı olarak iki matrisin direk, yada diğer adıyla tensör çarpımı yapılabilmektedir. İki karesel matris $A_{m \times m}$ ve $B_{n \times n}$ olmak üzere tensör çarpım

$$C = A \otimes B \tag{4.7}$$

şeklinde yazılır. C matrisi $mn \times mn$ boyutlu bir matristir. C matrisinin elemanları

$$C_{\alpha\beta} = a_{ij} b_{kl}, \quad \alpha = m(i-1) + k, \; \beta = n(j-1) + l \tag{4.8}$$

ile verilir.

Örnek 4.6 2×2'lik iki matris $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ olmak üzere $A \otimes B$ tensör çarpımını yapın.

Çözüm 4.6 $A \otimes B = \begin{pmatrix} aB & bB \\ cB & dB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae & af & be & bf \\ ag & ah & bg & bh \\ ce & cf & de & df \\ cg & ch & dg & dh \end{pmatrix}$ olarak bulunur.

Örnek 4.7 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere $A \otimes B$ tensör çarpımını bulun.

Çözüm 4.7 İşlemler yapılırsa $A \otimes B$ tensör çarpımı

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 2} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}_{6\times 6}$$

olarak elde edilir.■

4.2 Matrislerle İlgili Temel Kavramlar

Bu kesimde, bir matrisin transpozu tanımlandıktan sonra determinant kavramı örnekleriyle izah edilecektir. Daha sonra bir matrisin izi verilecek ve son olarak tekil olmayan bir matrisin tersinin nasıl bulunacağı iki ayrı yöntemle açıklanacaktır.

4.2.1 Bir Matrisin Transpozu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisini göz önüne alalım. Bu matrisin her bir satırı simetrik olarak aynı adlı sütun olacak şekilde yazılırsa elde edilen matrise, A matrisinin transpozu denir ve A^T ile gösterilir. Örneğin, 1. satır 1. sütun, 2. satır 2. sütun

olarak yazılır. Tüm satırlar sütun olacak şekilde düzenlendiğinde A^T

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (4.9)$$

olarak elde edilir. Sütunları satır olarak değiştirerek de transpoz işlemini yapmak mümkündür. Transpoz işleminde satır-sütun indisleri yer değiştirir. A matrisinin elemanları a_{ij} ise, A^T matrisinin elemanları a_{ji} olur. Matrisin köşegen elemanları yer değiştirmez. Matrisin sol üst köşesinden sağ alt köşesine bir ayna konulsa, elemanlar ayna simetrisine göre yer değiştirir. Transpoz işlemi $m \times n$ boyutlu bir matrisi, $n \times m$ boyutlu matrise dönüştürür.

Transpoz işlemi için aşağıdaki özellikler yazılabilir:
i. Bir A matrisin transpozunun transpozu kendisine eşittir.
$(A^T)^T = A$
ii. A ve B matrislerinin toplamının transpozu, transpozları toplamına eşittir.
$(A + B)^T = A^T + B^T$
iii. A ve B matrislerinin çarpımlarının transpozu için $(AB)^T = B^T A^T$ eşitliği geçerlidir.

Örnek 4.8 $(AB)^T = B^T A^T$ olduğunu ispatlayın.
Çözüm 4.8 Eşitliğin sol tarafından başlayarak sağ tarafı bulalım. AB çarpım matrisinin i. satır j. sütun elemanının transpozu alınırsa

$$\left[(AB)_{ij}\right]^T = (AB)_{ji}$$

elde edilir. (4.6) eşitliğine göre, çarpımın j. satır i. sütun elemanını elde etmek için keyfi bir k indisi üzerinden toplam alınırsa

$$\left[(AB)_{ij}\right]^T = (AB)_{ji} = \sum_k a_{jk} b_{ki}$$

yazılabilir. Matris elemanlarını $a_{jk} = (a_{kj})^T$ ve $b_{ki} = (b_{ik})^T$ olarak yazmak mümkündür. Yine (4.6)'ya göre çarpmanın yapılabilmesi için $(b_{ik})^T$ terimi birinci sırada yazılmalıdır. Buna göre

$$\left[(AB)_{ij}\right]^T = \sum_k (b_{ik})^T (a_{kj})^T$$

elde edilir. Son olarak mümkün tüm k indisleri üzerinden toplam yapılır ve i, j indisleri kaldırılırsa

$$(AB)^T = B^T A^T$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 4.9 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ matrislerini kullanarak $(AB)^T = B^T A^T$ olduğunu gösterin.

Çözüm 4.9 Önce eşitliğin sol tarafı için işlem yapılırsa

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^T = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

bulunur. Sağ taraf için işlem yapılırsa

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece $(AB)^T = B^T A^T$ eşitliği sağlanmış olur.■

4.2.2 Bir Matrisin Determinantı

İndis karışıklığını azaltmak için 3×3 boyutlu bir matrisin birinci satır elemanlarını a_i, ikinci satır elemanlarını b_j ve üçüncü satır elemanlarını c_k ile gösterelim. i, j ve k indisleri $i, j, k = 1, 2, 3$ değerlerini alabilir. Buna göre bir A matrisi

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

şeklinde yazılabilir. Bu matrisin determinantı için

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

gösterimi kullanılır ve ε_{ijk} Levi-Civita tensörü olmak üzere

$$D_3 = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k \tag{4.10}$$

ifadesine uygun olarak elde edilen D_3 sonucuna, A matrisinin determinantı denir ve $det(A)$ veya kısaca $detA$ şeklinde yazılabilir. Determinant işlemindeki her bir çarpım, bir satır veya sütundan sadece bir elemanı içerir. Determinant sadece karesel matrislerde tanımlıdır ve sonuç bir skalerdir. 3×3 boyutlu A matrisi için (4.10) ile verilen D_3 açıkça yazılırsa

$$detA = +a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \tag{4.11}$$

bulunur. Laplace açılımı denen bir indirgeme ile (4.11) ile verilen ifade, üç tane 2×2 boyutlu matrisin determinantları cinsinden yazılabilir:

$$D_3 = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \tag{4.12}$$

Burada açılım birinci satıra göre yapıldı. Başka bir satıra veya sütuna göre açılım yapılırsa sonuç değişmez. Genel olarak $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2\times2}$ matrisinin determinantı $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ şeklindedir. Buna göre $\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} = b_2c_3 - b_3c_2$, $\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} = b_1c_3 - b_3c_1$ ve $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = b_1c_2 - b_2c_1$ olacağı açıktır.

$n \times n$ boyutlu karesel bir matrisin determinantını bulmak için herhangi bir satıra veya sütuna göre açılırsa n tane $(n-1) \times (n-1)$ boyutlu determinantları içeren bir toplam bulunur. Böylece determinantın derecesi bir derece indirgenmiş olur. 3×3 boyutlu bir matris için elde edilen bu sonuç, $n \times n$ boyutlu A matrisin determinantı için

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. $1 \le i \le n$ olmak üzere keyfi i. satıra göre açılım yapılırsa

$$D_n = detA = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \tag{4.13}$$

elde edilir. Bu kez $1 \le j \le n$ olmak üzere keyfi j. satıra göre açılım yapılırsa

$$D_n = detA = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

(4.13) ile aynı sonuç bulunur. Burada A_{ij}, $(-1)^{i+j}$ işaret düzenleyici çarpanı ve i. satır ve j. sütun hariç tutularak elde edilen matrisin determinantından oluşur. Dolayısıyla A_{ij}, i. satır ve j. sütundan herhangi bir elemanı içermez. A_{ij}'ye a_{ij}'nin kofaktörü denir. İşaret düzenleyici hariç tutularak geri kalan kısım M_{ij} ile gösterilir ve minör adını alır. Buna göre A_{ij} kofaktörü M_{ij} minörü cinsinden

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \tag{4.14}$$

yazılabilir. Bu açılım tekrar tekrar uygulanarak büyük boyutlu matrislerin determinantı bulunabilir. Bol sıfırlı matrisler için bu yöntem etkilidir. Büyük boyutlu matrislerin determinantını bulmak için Gauss yok etme, LU ayrıştırması vb bir çok yöntemin var olduğunu belirtmekte yarar var.

Örnek 4.10 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin determinantını hesaplayın.

Çözüm 4.10 İkinci satıra göre açılırsa

$$detB = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}(0)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}(1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{2+3}(0)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

olur. (0) çarpanından dolayı birinci ve üçüncü terimler sıfırdır. İkinci terim hesaplanırsa

$$detB = (-1)^4(1)(1 \times 0 - 1 \times 1) = -1$$

bulunur.

Örnek 4.11 $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin determinantını hesaplayın.

Çözüm 4.11 Üçüncü satıra göre açarsak

$$detC = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}(0)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}(1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{3+3}(1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

yazılabilir. Gerekli işlemler yapılırsa

$$detC = 0 - 2 - 5 = -7$$

bulunur.■

Determinant işleminin özellikleri:

i. Bir A matrisin determinantı ile transpozunun determinantı eşittir. $det(A) = det\left(A^T\right)$

ii. Bir matrisin bir sayı ile çarpımının determinantı $det(\alpha A_{n\times n}) = \alpha^n detA$ eşitliğini sağlar.

iii. A ve B matrislerinin çarpımlarının determinantı, determinantları çarpımına eşittir.
$det(AB) = det(A)det(B)$
iv. Bir matrisin iki satırı veya iki sütunu yerdeğiştirirse determinant işaret değiştirir.
v. Bir matrisin herhangi iki satırı veya iki sütunu eşit ise determinantı sıfırdır.
vi. Bir matrisin köşegen terimlerinin altındaki veya üstündeki elemanların hepsi sıfır ise determinant köşegen terimlerin çarpımına eşittir.

4.2.3 Bir Matrisin İzi

$n \times n$ boyutlu karesel bir A matrisinin izi $Tr(A)$ veya kısaca TrA biçiminde gösterilir. A matrisinin izi

$$TrA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{4.15}$$

şeklinde köşegen elemanların toplamına eşittir. $n \times n$ boyutlu I birim matrisinin izi

$$TrA = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

olur.

İz için aşağıdaki özellikler yazılabilir:
i. Bir A matrisinin izi ile transpozu A^T'nin izi eşittir.
$Tr(A) = Tr(A^T)$
ii. İki matrisin toplamının izi, izleri toplamına eşittir.
$Tr(A+B) = TrA + TrB$
iii. Genel olarak $AB \neq BA$ olmasına rağmen, iki matrisin çarpım sırası değiştirilirse izi değişmez.
$Tr(AB) = Tr(BA)$
iv. Üç matrisin çarpım sırası simetrik olarak değişirse izi aynı kalır.
$Tr(ABC) = Tr(BCA) = Tr(CAB)$
Simetri dönüşümleri altında bir matrisin izinin değişmediğini, daha sonra detaylarıyla izah edeceğiz.

Örnek 4.12 $Tr(AB) = Tr(BA)$ olduğunu ispatlayın.
Çözüm 4.12 AB çarpım matrisinin izi ile başlayıp BA'nın izini elde edersek ispat tamamlanmış olur.

$$\begin{aligned} Tr(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} B_{ji}A_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (BA)_{jj} = Tr(BA) \end{aligned}$$

Örnek 4.13 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisleri için $Tr(AB) = Tr(BA)$ olduğunu gösterin.

Çözüm 4.13 Örnek 4.5'te AB ve BA çarpımları yapılmış $AB = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ ve $BA = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \\ 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ olarak bulunmuştu. Çarpım matrisleri farklı olmasına rağmen köşegen terimler aynı kaldığından $Tr(AB) = Tr(BA) = 4 + 3 + 4 = 11$ bulunur.■

4.2.4 Bir Matrisin Tersi

Karesel bir A matrisini göz önüne alalım. I birim matris olmak üzere

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I \tag{4.16}$$

şartını sağlayan bir A^{-1} matrisi varsa, buna A matrisinin ters matrisi veya kısaca tersi denir. Eğer A matrisi tekil ise yani $detA = 0$ ise A^{-1} matrisi yoktur. Fakat $detA \neq 0$ olmak üzere A^{-1} matrisi var ve tektir. A^{-1} matrisinin elemanları, dolayısıyla A^{-1} matrisini elde etmenin bir kaç yöntemi vardır. Bunlardan biri

$$\left(A^{-1}\right)_{ij} = A^{-1}_{ij} = (-1)^{i+j}\frac{M_{ji}}{detA} \tag{4.17}$$

ile verilen minör yöntemini kullanmaktır. Burada ters matrisinin i. satır j. sütun elemanını hesaplarken, M_{ji} minörünün kullanıldığına dikkat edilmelidir.

Örnek 4.14 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin varsa, tersini bulunuz.

Çözüm 4.14 Hesaplanırsa $detA = 1$ bulunur. Öyleyse A^{-1} matrisi mevcuttur. (4.17) yardımı ile ters matrisinin elemanlarını hesaplayalım.

$$A^{-1}_{11} = \frac{(-1)^{1+1}}{1}M_{11} = (+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (1-2) = -1$$

$$A^{-1}_{12} = \frac{(-1)^{1+2}}{1}M_{21} = (-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \times (3+2) = -5$$

$$A^{-1}_{13} = \frac{(-1)^{1+3}}{1}M_{31} = (+1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (+1) \times (3+1) = 4$$

$$A^{-1}_{21} = \frac{(-1)^{2+1}}{1}M_{12} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \times (2-3) = 1$$

$$A^{-1}_{22} = \frac{(-1)^{2+2}}{1}M_{22} = (+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (+1) \times (1+3) = 4$$

$$A_{23}^{-1} = \frac{(-1)^{2+3}}{1} M_{32} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \times (1+2) = -3$$
$$A_{31}^{-1} = \frac{(-1)^{3+1}}{1} M_{13} = (+1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (+1) \times (4-3) = 1$$
$$A_{32}^{-1} = \frac{(-1)^{3+2}}{1} M_{23} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \times (2-9) = 7$$
$$A_{33}^{-1} = \frac{(-1)^{3+3}}{1} M_{33} = (+1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (+1) \times (1-6) = -5$$

bulunur. Elemanları matris düzeninde yazılırsa A^{-1} matrisi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix} \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek 4.15 Örnek 4.14'te elde edilen A^{-1} için $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ olduğunu gösterin.

Çözüm 4.15 Önce $A^{-1}A$ için işlem yapılırsa

$$\begin{aligned} A^{-1}A &= \begin{pmatrix} -1 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1-10+12 & -3-5+8 & 1-5+4 \\ 1+8-9 & 3+4-6 & -1+4-3 \\ 1+14-15 & 3+7-10 & -1+7-5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

bulunur. Bu kez AA^{-1} için işlem yapılırsa

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1+3-1 & -5+12-7 & 4-9+5 \\ -2+1+1 & -10+4+7 & 8-3-5 \\ -3+2+1 & -15+8+7 & 12-6-5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ olduğu gösterilmiş oldu.■

Bu örnekten hareketle herhangi bir matrisin, tersi ile komüte ettiğini söyleyebiliriz. Yani $\left[A, A^{-1}\right] = 0$'dır.

Ters matris elde etmenin ikinci bir yolu da şudur:

$n \times n$ boyutlu terslenebilir bir A matrisi verilmiş olsun. I, $n \times n$ boyutlu birim matris olmak üzere A ve I'dan oluşturulan $n \times 2n$ boyutlu $(A\,|I)$ matrisi, temel satır işlemleri yapılarak $n \times 2n$ boyutlu $(I\,|B)$ matrisine dönüştürülür. Böylece elde edilen B matrisi A matrisinin tersidir: $B = A^{-1}$. Buna Gauss-Jordan metodu denir.

Temel satır işlemleri kısaca şöyle verilebilir:
i. Bir satırı 0'dan farklı bir sayı ile çarpmak
ii. Bir satıra, bir sayı ile çarpılmış diğer bir satırı eklemek
iii. İki satırı değiştirmek

Örnek 4.16 Örnek 4.14'te verilen A matrisin tersini Gauss-Jordan metodu ile bulunuz.

Çözüm 4.16 $(A\,|I)_{3\times 6}$ matrisi

$$(A\,|I) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Bu matrise aşağıda verilen matris işlemlerini uygulayalım:

1. İkinci satırı birinci satıra ekle

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{(2)+(1)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Üçüncü satırı -1 ile çarpıp ikinci satıra ekle

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{-1\times(3)+(2)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. İkinci satırı 4 ile çarpıp birinci satıra ekle

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{4\times(2)+(1)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 5 & -4 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Birinci satırı -1 ile çarp

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 5 & -4 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{-1\times(1)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Birinci satırı ikinci satıra ekle

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{(1)+(2)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. İkinci satırı -1 ile çarp

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{-1\times(2)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Birinci satırı -3 ile çarpıp üçüncü satıra ekle

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{-3\times(1)+(3)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 15 & -11 \end{pmatrix}$$

8. İkinci satırı -2 ile çarpıp üçüncü satıra ekle

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 15 & -11 \end{pmatrix} \overset{-2\times(2)+(3)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

Böylece sol taraf I birim matrisine dönüşürken sağ taraf A^{-1}matrisini verir:

$$(I\,|A^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

Burada sekiz işlemle yapılan dönüşümü daha az işlemle yapmak mümkündür. Bu tamamen sizin öngörünüze ve deneyiminize bağlıdır.

Örnek 4.17 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin tersini Gauss-Jordan metodu ile bulunuz.

Çözüm 4.17 $(A\,|I)_{3\times 6}$ matrisi

$$(A\,|I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Aşağıda verilen temel satır işlemleri yapılırsa

1. Birinci satırı −2 ile çarpıp üçüncü satıra ekle

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2\times(1)+(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. İkinci satırı 3 ile çarpıp üçüncü satıra ekle

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3\times(2)+(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Üçüncü satırı -1/3 ile çarp

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1/3\times(3)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -1 & -1/3 \end{pmatrix}$$

4. Üçüncü satırı 2 ile çarpıp ikinci satıra ekle

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -1 & -1/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\times(3)+(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

5. Üçüncü satırı birinci satıra ekle

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -1 & -1/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)+(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5/3 & -1 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -1 & -1/3 \end{pmatrix}$$

6. İkinci satırı −2 ile çarpıp birinci satıra ekle

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5/3 & -1 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -1 & -1/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2\times(2)+(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -1 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$(I\,|A^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -1 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4/3 & -1 & -2/3 \\ 2/3 & -1 & -1/3 \end{pmatrix}$$

bulunur.

Örnek 4.18 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin tersini minör yöntemiyle bulunuz.

Çözüm 4.18 Hesaplanırsa $detA = -3$ bulunur. Öyleyse A^{-1} matrisi mevcuttur. (4.17) yardımı ile ters matrisinin elemanları hesaplanırsa

$$A_{11}^{-1} = \frac{(-1)^{1+1}}{-3} M_{11} = -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \times (1+2) = -\frac{1}{3} \times 3 = -1$$

$$A_{12}^{-1} = \frac{(-1)^{1+2}}{-3} M_{21} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \times (2+1) = \frac{3}{3} = 1$$

$$A_{13}^{-1} = \frac{(-1)^{1+3}}{-3} M_{31} = -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \times (-4+1) = -\frac{1}{3} \times (-3) = 1$$

$$A_{21}^{-1} = \frac{(-1)^{2+1}}{-3} M_{12} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \times (0+4) = \frac{4}{3}$$

$$A_{22}^{-1} = \frac{(-1)^{2+2}}{-3} M_{22} = -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \times (1+2) = -\frac{3}{3} = -1$$

$$A_{23}^{-1} = \frac{(-1)^{2+3}}{-3} M_{32} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \times (-2+0) = -\frac{2}{3}$$

$$A_{31}^{-1} = \frac{(-1)^{3+1}}{-3} M_{13} = -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \times (0-2) = \frac{2}{3}$$

$$A_{32}^{-1} = \frac{(-1)^{3+2}}{-3} M_{23} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \times (1-4) = -\frac{3}{3} = -1$$

$$A_{33}^{-1} = \frac{(-1)^{3+3}}{-3} M_{33} = -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \times (1-0) = -\frac{1}{3}$$

bulunur. Böylece A^{-1} matrisi

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4/3 & -1 & -2/3 \\ 2/3 & -1 & -1/3 \end{pmatrix}$ olarak bulunur.

Örnek 4.19 A terslenebilir bir matris olmak üzere $detA^{-1} = \frac{1}{detA}$ olduğunu gösterin.

Çözüm 4.19 İki matrisin çarpımının determinantı, determinantların çarpımına eşittir: $det\,(AB) = (detA)\,(detB)$.

Bu eşitlikte $B = A^{-1}$ yazılırsa

$$det\left(AA^{-1}\right) = (detA)\left(detA^{-1}\right)$$

olur. Diğer yandan $AA^{-1} = I$ ve $detI = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} (detA)\left(detA^{-1}\right) &= detI = 1 \\ &\Rightarrow detA^{-1} = \frac{1}{detA} \end{aligned}$$

bulunur.■

4.3 Matrislerin Sınıflandırılması

Bu kesimde, matrisleri özelliklerine göre sınıflandıracağız.

Kompleks Matris

Bir matrisin elemanlarından en az bir tanesi kompleks $i(\ i^2 = -1)$ sayısını içeriyorsa, o matrise kompleks matris denir. Örnek olarak

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

matrislerini verilebilir.

Kompleks Eşlenik Matris

Bir matrisin kompleks elemanları için $i \longrightarrow -i$ dönüşümü yapılarak elde edilen matrise kompleks eşlenik matris denir. $A = (a_{jk})$ matrisinin kompleks eşleniği $A^* = (a_{jk})^*$ olarak gösterilir.

Örnek olarak

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 2 & 0 \\ i & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

verilebilir.

Reel Matris

Bir A matrisi, kompleks eşleniğine eşit ise yani $A = A^*$ ise, A matrisi reeldir. Diğer bir deyişle reel matris, tüm elemanları reel sayılardan oluşan matristir. Reel matrisin elemanları için $(a_{jk}) = (a_{jk})^*$ eşitliği vardır.

Simetrik Matris

Transpozu kendisine eşit olan matrise simetrik matris denir. Bu özellik

$$\begin{aligned} A &= A^T \\ &\Rightarrow (a_{ij}) = (a_{ji}) \end{aligned}$$

şeklinde gösterilir. Örnek olarak

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & i & 1-i \\ i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisleri verilebilir.

Anti Simetrik Matris

Transpozu bir işaret farkıyla kendisine eşit olan matrise antisimetrik matris denir ve $A^T = -A$ veya $(a_{ji}) = -(a_{ij})$ şeklinde gösterilir. Antisimetrik matrisin köşegen elemanları sıfırdır. Örnek olarak

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad A^T &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -A \end{aligned}$$

matrisi verilebilir.

Hermitik Eşlenik Matris

Bir A matrisinin transpozunun kompleks eşleniğine veya kompleks eşleniğin transpozuna hermitik eşlenik matris denir. $A^\dagger$ şeklinde gösterilir. Bu tanıma göre

$$\begin{aligned} A^\dagger &= \left(A^T\right)^* = (A^*)^T \\ &\Rightarrow (a_{ij})^\dagger = (a_{ji})^* \end{aligned}$$

yazılabilir. Aşağıda verilen A matrisinin hermitik eşleniği $A^\dagger$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ i & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(A^T\right)^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -i & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

Hermitik Matris

Hermitik eşleniği, kendisine eşit olan matrise hermitik matris denir. Bu tanıma göre hermitik matris için

$$A = A^\dagger \Rightarrow (a_{ij}) = (a_{ij})^\dagger = (a_{ji})^*$$

yazılabilir. Hermitik matrise örnek olarak $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 3 \end{pmatrix}$ matrisi verilebilir.

Anti Hermitik Matris

Eğer bir A matrisi, hermitik eşleniğine bir işaret farkıyla eşit ise yani,

$$A^\dagger = -A \Rightarrow (a_{ij})^\dagger = (a_{ji})^* = -(a_{ij})$$

ise A matrisi anti hermitiktir. Örnek;

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} i & 1-i & 1+i \\ -1-i & 2i & i-1 \\ i-1 & i+1 & 3i \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} i & -1-i & i-1 \\ 1-i & 2i & i+1 \\ 1+i & i-1 & 3i \end{pmatrix} \\ (A^T)^* &= \begin{pmatrix} -i & -1+i & -i-1 \\ 1+i & -2i & -i+1 \\ 1-i & -i-1 & -3i \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} i & 1-i & 1+i \\ -1-i & 2i & i-1 \\ i-1 & i+1 & 3i \end{pmatrix} \\ &= -A \end{aligned}$$

olduğundan A matrisi anti hermitiktir. Anti hermitik bir matrisin köşegen elemanlarının saf imajiner olduğuna dikkat edin.

Ortogonal Matris

$m \times n$ boyutlu bir A matrisi

$$A_{m\times n}A^T_{n\times m} = I_{m\times m} \text{ veya } A^T_{n\times m}A_{m\times n} = I_{n\times n}$$

şartını sağlıyorsa A matrisi ortogonaldir denir. $n \times n$ boyutlu karesel matris için

$$A_{n\times n}A^T_{n\times n} = A^T_{n\times n}A_{n\times n} = I_{n\times n} \Rightarrow AA^T = A^TA = I$$

yazılabilir. Buna göre; ortogonal bir matris, transpozu ile sıra değiştirebilir yani $[A, A^T] = AA^T - A^TA = 0$'dır. AA^T 'nin determinantı alınırsa

$$det\left(AA^T\right) = detAdetA^T = (detA)^2 = detI = 1$$

$$\Rightarrow detA = \mp 1$$

bulunur. Burada $detA = detA^T$ ve $detI = 1$ eşitlikleri kullanıldı. Buna göre ortogonal bir matrisin determinantı ∓ 1'dir. Tersi doğru değildir. Yani determinantı ∓ 1 olan her matris ortogonal değildir. Eğer A matrisinin tersi varsa, $AA^T = I$ eşitliğinin iki tarafı soldan A^{-1} ile çarpılır ve gerekli işlemleri yapılırsa

$$\begin{aligned} \underbrace{A^{-1}A}\ A^T &= A^{-1}I = IA^{-1} \\ IA^T &= IA^{-1} \Rightarrow A^{-1} = A^T \end{aligned}$$

olur. Buna göre, ortogonal bir matrisin tersi transpozuna eşittir.

Normal Matris

Bir A matrisi, hermitik eşleniği ile sıra değiştiriyorsa yani

$$\left[A, A^{\dagger}\right] = AA^{\dagger} - A^{\dagger}A = 0$$

ise A matrisine normal matris denir.

Örnek 4.20a) $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ matrisinin ortogonal oduğunu gösterin. **b)** $detR = ?$

Çözüm 4.20a) RR^T çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} RR^T &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0+1+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & \frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} \\ 0+0+0 & -\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

bulunur. $RR^T = I$ olduğundan R ortogonaldir.

b) Birinci satıra göre açılım yapılırsa, R matrisinin determinantı

$$\begin{aligned} detR &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = (1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \\ detR &= -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = -1 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 4.21 $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ matrisinin tersini minör yöntemi ile bulun ve sonucu R^T ile karşılaştırın.

Çözüm 4.21 R matrisinin transpozu alınırsa

$$R^T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

bulunur. $detR = -1$ olduğundan R^{-1} matrisinin elemanları

$$R^{-1}_{11} = \frac{(-1)^{1+1}}{-1}M_{11} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = -1 \times (0-0) = 0$$

$$R^{-1}_{12} = \frac{(-1)^{1+2}}{-1}M_{21} = (1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 1 \times (\tfrac{1}{\sqrt{2}} - 0) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$$R^{-1}_{13} = \frac{(-1)^{1+3}}{-1}M_{31} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = -1 \times (\tfrac{1}{\sqrt{2}} - 0) = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$$R^{-1}_{21} = \frac{(-1)^{2+1}}{-1}M_{12} = (1)\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 1 \times (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}) = 1$$

$$R^{-1}_{22} = \frac{(-1)^{2+2}}{-1}M_{22} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 0$$

$$R^{-1}_{23} = \frac{(-1)^{2+3}}{-1}M_{32} = (1)\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 0$$

$$R^{-1}_{31} = \frac{(-1)^{3+1}}{-1}M_{13} = (-1)\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$R^{-1}_{32} = \frac{(-1)^{3+2}}{-1}M_{23} = (1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = 1 \times (0 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$$R^{-1}_{33} = \frac{(-1)^{3+3}}{-1}M_{33} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = -1 \times (0 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

bulunur. Böylece R^{-1} matrisi

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Karşılaştırılırsa $R^{-1} = R^T$ olduğu görülür.

Birimsel(Üniter) Matris

Adet olduğu üzere üniter matrisi U ile gösterelim. $m \times n$ boyutlu bir U matrisi

$$\begin{aligned} U_{m\times n}U^{\dagger}_{n\times m} &= I_{m\times m} \\ U^{\dagger}_{n\times m}U_{m\times n} &= I_{n\times n} \end{aligned}$$

şartını sağlıyorsa U matrisi üniterdir denir. $n \times n$ boyutlu karesel U matrisi için

$$U_{n\times n}U^{\dagger}_{n\times n} = U^{\dagger}_{n\times n}U_{n\times n} = I_{n\times n} \Rightarrow UU^{\dagger} = U^{\dagger}U = I$$

yazılabilir.

Örnek 4.22 $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ matrisi üniter midir?

Çözüm 4.22 $U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ bulunur. $U^\dagger U$ çarpımı yapılırsa $(i^2 = -1)$

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\times 1 + (-i)(i) & 1\times(i) + (-i)\times 1 \\ (-i)\times 1 + 1(i) & (-i)\times(i) + 1\times 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - i^2 & i - i \\ -i + i & -i^2 + 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+1 & 0 \\ 0 & 1+1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre U matrisi birimseldir.

Örnek 4.23 Örnek 4.22'de verilen U ve $U^\dagger$ matrislerinin determinantlarını hesaplayın ve sonucu karşılaştırın.

Çözüm 4.23 U ve $U^\dagger$ matrislerinin determinantları hesaplanırsa

$$\begin{aligned} detU &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{vmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(1\times 1 - (i)\times(i)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - i^2\right) = \frac{1}{2}(1+1) = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} detU^\dagger &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{vmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(1\times 1 - (-i)\times(-i)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - i^2\right) = \frac{1}{2}(1+1) = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

$detU = detU^\dagger$ olduğu görülür. U üniter matrisi için

$$det\left(UU^\dagger\right) = det\left(UU^*\right) = (detU)(detU^*) = detI = 1$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlikten

$$(detU)(detU^*) = 1 \Rightarrow |detU| = 1$$

sonucuna ulaşılır. İkinci olarak $UU^\dagger = I$ eşitliğinin iki tarafı soldan U^{-1} ile çarpılır ve $U^{-1}U = I$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \underbrace{U^{-1}U}_{I}\ U^\dagger &= U^{-1}I = IU^{-1} \\ IU^\dagger &= IU^{-1} \\ &\Rightarrow U^{-1} = U^\dagger \end{aligned}$$

sonucu bulunur. Buna göre üniter bir matrisin tersi, hermitik eşleniğine eşittir.■

BÖLÜM SONU PROBLEMLERİ

4.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisleri için

a) $A + 2B$

b) $3A - B$ işlemlerini yapın.

4.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ matrisi için A^2 ve A^3 işlemlerini yapınız.

4.3 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisleri veriliyor. AB ve BA çarpım işlemlerini yapın. Bu matrislerin komüte edip etmediklerini belirleyin.

4.4 $M_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$ ve

$M_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrisleri veriliyor.

$[M_x, M_y] = M_x M_y - M_y M_x = iM_z$ olduğunu gösteriniz.

4.5 $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ve $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisleri için $C \otimes D$ ve $D \otimes C$ tensör çarpımlarını yapın.

4.6 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & 2 & -i \\ -i & i & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin hermitik olduğunu gösterin.

4.7 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin tersinin

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{11} & \frac{4}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{1}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{6}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$ olduğunu gösterin.

4.8 $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & i \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin tersini bulun.

Cevap: $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{i}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4.9 Bir matrisin tersi $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ olarak verilmiştir. A matrisini bulun. *İpucu:* $(A^{-1})^{-1} = A$.

Cevap: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.10 $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$ matrisinin ortogonal olduğunu gösterin ve S^{-1} matrisini bulun.

4.11 Pauli spin matrisleri $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ ve $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ olarak veriliyor. $\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2 = 1$ olduğunu gösteriniz.

4.12 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisleri veriliyor. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ olduğunu gösteriniz.

4.13 $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ matrisinin determinantının $detA = 1.2.3.4$ olduğunu gösterin.

4.14 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & -i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix}$ matrisi için $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & i \\ -1 & 2 & -i \\ -i & i & 2 \end{pmatrix}$ olduğunu gösterin.

4.15 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ matrisi veriliyor.

a) $B = A + A^T$ matrisinin simetrik,
b) $C = A - A^T$ matrisinin ise anti simetrik olduğunu gösteriniz.

4.16 $U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin üniter olduğunu gösterin ve U^{-1} matrisini bulun.



BÖLÜM 5 LİNEER VEKTÖR UZAYLARI ve LİNEER İŞLEMCİLER

Bu bölümde; üç boyutlu uzayda üç dik bileşenli bir vektörü, n boyutlu E_n Öklid uzayında n bileşenli vektöre genelleyeceğiz. İçinde yaşadığımız 3 boyutlu uzaydan daha fazla boyuta sahip olan bu uzay, doğası gereği soyuttur. n boyutlu E_n uzayı üzerinde bir takım özellikleri sağlayan V_n lineer vektör uzayını tanımlayacağız. Bu vektör uzayına, n boyutlu vektörlerin yanı sıra, homojen lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerini, matrisleri, kuantum mekaniğindeki spinörleri ve dalga fonksiyonlarını da dahil ederek genişletmek mümkün olmaktadır. Ancak burada bir kaç örnekle yetineceğiz. Daha sonra bir vektörü başka bir vektöre dönüştüren işlemcilerden, özel bir öneme sahip olan lineer işlemcileri tanımlayıp, onların matris temsillerini elde etmenin bir yöntemini vereceğiz. Lineer işlemciler için özdeğer denklemini ele alarak, değişik durumlar için özdeğer ve özvektörleri elde edeceğiz.

5.1 Lineer Vektör Uzayları

Üç boyutlu kartezyen koordinatların bir genellemesi olarak n boyutlu Öklid uzayı E_n'de bir $\mathbf{a}$ vektörü $\mathbf{e}_i$ baz vektörleri cinsinden

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{e}_i \tag{5.1}$$

olarak yazılır. Burada $a_i\,(i = 1, 2, .., n)$, $\mathbf{a}$ vektörünün dik bileşenleridir. Bazı kaynaklarda $\mathbf{a}$ vektörü, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ şeklinde gösterilmektedir. Bu, (5.1) gösterimi ile aynı anlamdadır. E_n'de $\mathbf{b}$ ve $\mathbf{c}$ vektörleri de benzer şekilde

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} b_i\mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + \cdots + c_n\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{e}_i$$

olarak yazılabilir. E_n uzayı üzerinde tanımlanan bu vektör kümesinin oluşturduğu uzayı V_n ile gösterelim.

$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in V_n$ vektörler ve α, β reel veya kompleks olabilen skalerler olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağladığı için V_n vektör uzayı, lineer vektör uzayıdır.

1. Kapalılık özelliği: V_n vektör uzayında iki vektörün toplamı

$$\begin{aligned} \mathbf{a}+\mathbf{b} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n) + (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n) \\ &= (a_1+b_1)\,\mathbf{e}_1 + (a_2+b_2)\,\mathbf{e}_2 + \cdots + (a_n+b_n)\,\mathbf{e}_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)\,\mathbf{e}_i \qquad (5.2) \end{aligned}$$

yine aynı uzayda bir vektördür.

2. Toplama işleminde değişme özelliği vardır.

$$\begin{aligned} \mathbf{b}+\mathbf{a} &= (b_1+a_1)\,\mathbf{e}_1 + (b_2+a_2)\,\mathbf{e}_2 + \cdots + (b_n+a_n)\,\mathbf{e}_n \\ &= (a_1+b_1)\,\mathbf{e}_1 + (a_2+b_2)\,\mathbf{e}_2 + \cdots + (a_n+b_n)\,\mathbf{e}_n \\ &= \mathbf{a}+\mathbf{b} \qquad (5.3) \end{aligned}$$

3. Üç vektörün toplamı için birleşme özelliği sağlanır.

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a}+\mathbf{b}) + \mathbf{c} \qquad (5.4)$$

4. **a** vektörüne eklendiğinde onu değiştirmeyen bir $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)$ sıfır vektörü mevcuttur.

$$\mathbf{a} + 0 = \mathbf{a} \qquad (5.5)$$

5. **a** vektörüne eklendiğinde onu sıfır yapan bir

$$-\mathbf{a} = -a_1\mathbf{e}_1 - a_2\mathbf{e}_2 - \cdots - a_n\mathbf{e}_n$$

ters vektör vardır.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}+(-\mathbf{a}) &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n) \\ &\quad + (-a_1\mathbf{e}_1 - a_2\mathbf{e}_2 - \cdots - a_n\mathbf{e}_n) \\ &= (a_1-a_1)\,\mathbf{e}_1 + (a_2-a_2)\,\mathbf{e}_2 + \cdots + (a_n-a_n)\,\mathbf{e}_n = 0 \qquad (5.6) \end{aligned}$$

6. **a** vektörünün α ile çarpımı aynı vektör uzayında bir vektördür.

$$\alpha\mathbf{a} = \alpha a_1\mathbf{e}_1 + \alpha a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha a_n\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_i)\,\mathbf{e}_i \qquad (5.7)$$

7. α ve β skalerleri için

$$\begin{aligned} \alpha\,(\beta\mathbf{a}) &= \alpha\,(\beta a_1\mathbf{e}_1 + \beta a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \beta a_n\mathbf{e}_n) \\ &= (\alpha\beta)\,(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n) \\ &= (\alpha\beta)\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{e}_i = (\alpha\beta)\,\mathbf{a} \qquad (5.8) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

8. α ve β skalerlerinin vektör üzerine

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta)\,\mathbf{a} &= (\alpha+\beta)\,(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n) \\
&= (\alpha+\beta)\,a_1\mathbf{e}_1 + (\alpha+\beta)\,a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + (\alpha+\beta)\,a_n\mathbf{e}_n \\
&= \alpha\,(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n) + \beta\,(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n) \\
(\alpha+\beta)\,\mathbf{a} &= \alpha\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{e}_i + \beta\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{e}_i = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}
\end{aligned}$$

dağılma özelliği vardır.

9. α skalerinin

$$\begin{aligned}
\alpha\,(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= \alpha\,[(a_1+b_1)\,\mathbf{e}_1 + (a_2+b_2)\,\mathbf{e}_2 + \cdots + (a_n+b_n)\,\mathbf{e}_n] \\
&= \alpha\,(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n) + \alpha\,(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n) \\
&= \alpha\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{e}_i + \alpha\sum_{i=1}^{n} b_i\mathbf{e}_i = \alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b} \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

vektör toplamı üzerine dağılma özelliği vardır.

10. Çarpmaya göre 1

$$1\mathbf{a} = \mathbf{a} \qquad (5.11)$$

etkisiz elemandır.

Acaba E_n üzerinde tanımladığımız n boyutlu vektörlerin uyduğu bu aksiyomları sağlayan başka nesneler var mıdır? Cevap evettir. E_n'de vektör bileşenleri reeldir. Fiziğin bazı alanlarında bu kısıtlamayı ortadan kaldıracak yeni nesnelere ihtiyaç vardır. Örneğin kuantum mekaniğinde, sistemin durumunu belirleyen ψ_n dalga fonksiyonu kompleks olabilir ve n kuantum sayısı sonsuz tane değer alabilir. ψ_n dalga fonksiyonları, Hilbert uzayında bir lineer vektör uzayı oluşturur. Kuantum mekaniğine de uygun olacak şekilde bu yeni vektörleri $|\ \rangle$ ket sembolü ile onun kompleks eşleniğini ise $\langle\ |$ bra sembolü ile göstermek yaygındır. Bra ve ket gösterimi ilk olarak Dirac tarafından kullanıldığından dolayı, Dirac gösterimi adını alır. Bu gösterime göre n boyutlu bir $|\, x\,\rangle$ vektörü, bileşenleri cinsinden

$$|\, x\,\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (5.12)$$

n satırlı bir sütün matrisi iken, onun kompleks eşleniği $\langle\, x\,|$ ise

$$\langle\, x\,| = \begin{pmatrix} x_1^* & x_2^* & \cdots & x_n^* \end{pmatrix} \qquad (5.13)$$

n sütunlu bir satır matrisidir. Hangi uzay üzerinde tanımlanırsa tanımlansınlar ve nasıl yazılırsa yazılsınlar yukarıdaki aksiyomları sağlayan bu nesnelere vektör denir ve bir lineer vektör uzayı oluştururlar.

Lineer Vektör Uzayına Örnekler

Birinci bölümde, reel sayılar uzayında tanımladığımız üç boyutlu vektörlerin bir lineer vektör uzayı oluşturdukları kolayca görülmektedir. Çünkü üç boyutlu reel vektör uzayında iki vektörün toplamı, bir vektörün bir reel sayı ile çarpımı, sıfır vektörü, toplamaya göre bir vektörün tersi gibi işlemler tanımlanmıştı. Zaten biz bu bölümde reel uzayın bir genellemesi olarak Öklid uzayına geçtik. Kavramları daha iyi anlamak için, n boyutlu uzayları $n = 2$ veya $n = 3$ boyuta indirgemek sıklıkla başvurulan bir yöntemdir. Lineer vektör uzaylarına örnekler vererek bakış açımızı genişletelim:

1. n pozitif bir tam sayı olmak üzere

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \\ Q_n(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n \\ R_n(x) &= d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots + d_n x^n \end{aligned}$$

polinom kümesini ele alalım.

Eğer a_n, b_n ve d_n katsayıları ve α, β sayılarının hepsi reel ise polinom uzayı, bir reel lineer vektör uzayıdır. Polinomlar için yukarıdaki aksiyomların bazılarına bakalım:

i. İki polinomun toplamı

$$\begin{aligned} P_n(x) + Q_n(x) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\, x \\ &\quad + (a_2 + b_2)\, x^2 + \cdots + (a_n + b_n)\, x^n \end{aligned}$$

yine bir polinomdur.

ii. $P_n(x)$ polinomunu bir α reel sayısıyla çarpımı

$$\alpha P_n(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \cdots + \alpha a_n x^n$$

olur. Burada iki reel sayının çarpımı yine reel bir sayı olacağından, αa_i'ler reeldir. Bu nedenle polinomun katsayıları yeni reel sayılardır. Bu yüzden $\alpha P_n(x)$ yine bir polinomdur. Bu iki özellik kapalılık özelliği olarak bilinir.

iii. $\alpha = -1$ için $P_n(x) = -a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \cdots - a_n x^n = -P_n(x)$ toplamaya göre ters polinom elde edilir.

iv. $a_i = 0$ için $P_n(x) = 0$ polinomu vardır.

v. Üç polinomun toplamı için

$$\begin{aligned} P_n + (Q_n + R_n) &= (P_n + Q_n) + R_n \\ &= (a_0 + b_0 + d_0) + (a_1 + b_1 + d_1)\, x \\ &\quad + (a_2 + b_2 + d_2)\, x^2 + \cdots + (a_n + b_n + d_n)\, x^n \end{aligned}$$

birleşme özelliği sağlanır. Diğer aksiyomların da sağlandığı gösterilebilir. Ancak tekrardan kaçınmak için bunu atlayacağız. a_n, b_n ve d_n katsayıları ve

α, β skalerlerinin hepsinin kompleks sayı olması durumunda, polinomların bir kompleks lineer vektör uzayı oluşturduğunu belirtmekte yarar var.

2. Keyfi m satırlı n sütunlu $A_{m \times n}$ reel matrisler kümesi ve reel α, β skalerleri bir reel lineer vektör uzayı oluşturur. Aynı boyutlu matrislerin toplamının, bir skalerle çarpımının yine aynı boyutlu bir matris olduğu, tüm elemanları sıfır olan sıfır matrisinin varlığı, I birim matrisin tanımı bir önceki bölümde verilmişti. Toplamaya göre ters matrisi elde etmek için bir matrisi -1 ile çarpmak yeterli olacaktır. Bütün aksiyomların sağlandığı gösterilebilir. Bunun yanısıra kompleks matrisler ve kompleks skalerler kullanıldığında, bir kompleks lineer vektör uzayı oluştuğunu da belirtelim.

Örnekleri çoğaltmak mümkündür. Ancak bu iki örnekle yetinelim.

5.2 Lineer Bağımsızlık, Vektör Uzayının Boyutu ve Baz Vektörleri

Bir V_n vektör uzayında $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$,...,$\mathbf{a}_n$ vektörleri arasında

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{a}_i = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0} \qquad (5.14)$$

olacak şekilde $\mathbf{a}_i$ vektörlerinin bir lineer bileşimi yazılabiliyorsa, söz konusu vektörler lineer bağımlıdır. Bu durumda (5.14) eşitliğini sağlayacak α_i'ler bulunabiliyor demektir. Eğer bu eşitlik sadece $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ olduğunda sağlanıyorsa $\mathbf{a}_i$ vektörleri lineer bağımsızdır. Bir vektör kümesi verildiğinde lineer bağımlı olup olmadıklarını test etmenin bir yolu vektörlerin bileşenlerinden satır düzeninde oluşturulmuş matrisin determinantına bakmaktır. Eğer determinant 0 ise vektörler lineer bağımlı, $\neq 0$ ise lineer bağımsızdır.

Örnek 5.1 3 boyutlu kartezyen koordinatlarda $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ve $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - \mathbf{k}$ vektörleri veriliyor. Bu vektörlerin lineer bağımlı olup olmadıklarını belirleyin. Eğer lineer bağımlı iseler α_1, α_2 ve α_3 sayılarını bulun.

Çözüm 5.1 Üç boyutlu bu vektörlerden her birinin aynı adlı bileşenleri bir sütuna gelecek şekilde 3×3 boyutlu bir matris olarak yazılır ve determinantı alınırsa

$$det \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

bulunur. Öyleyse $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$ ve $\mathbf{c}$ vektörleri lineer bağımlıdır. Bu vektörler (5.14) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{a}_3 &= \mathbf{0} \\ \alpha_1 (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) + \alpha_2 (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + \alpha_3 (3\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - \mathbf{k}) &= \mathbf{0} \\ (2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3)\, \mathbf{i} + (3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 8\alpha_3)\, \mathbf{j} + (-\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)\, \mathbf{k} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağlanması, yani **0** vektörünü vermesi için parantez içindeki ifadelerin ayrı ayrı sıfır olması gerekir. Buna göre

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \quad (1) \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 8\alpha_3 &= 0 \quad (2) \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

3 tane lineer denklem elde edilir. Bu denklem sisteminden α_1, α_2 sayılarını α_3 cinsinden bulmaya çalışalım:

$$(1) + (3) \Rightarrow \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -2\alpha_3$$

olur. $\alpha_1 = -2\alpha_3$ (2)'de yerine yazılırsa

$$2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_3$$

elde edilir. $\alpha_3 = k$ denilirse $\alpha_1 = -2k$ ve $\alpha_2 = -k$ bulunur. Burada k sıfırdan farklı keyfi bir sabittir. $k = 1$ seçersek $\alpha_1 = -2, \alpha_2 = -1$ ve $\alpha_3 = 1$ bulunur. Buna göre **a**,**b** ve **c** vektörleri arasında

$$-2\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$$

ilişkisi vardır. Bu sonuçtan hareketle vektörlerden herhangi biri diğer ikisi cinsinden yazılabilir. Örneğin **c** vektörü **a** ve **b** vektörleri cinsinden

$$\mathbf{c} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$$

olarak yazılabilir.■

Fonksiyonların lineer bağımsızlığı ise şöyle test edilir. n boyutlu polinom uzayında $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_n(x)$ gibi n tane polinomun lineer bağımsız olup olmadıkları Wronskiyen olarak isimlendirilen determinantla sınanır.

$$W = det \begin{pmatrix} P_1(x) & P_2(x) & & P_n(x) \\ P_1'(x) & P_2'(x) & & P_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_1^{(n-1)}(x) & P_2^{(n-1)}(x) & \cdots & P_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \qquad (5.15)$$

Eğer determinant 0 ise lineer bağımlı, $\neq 0$ ise lineer bağımsızdır.

Örnek 5.2 3 boyutlu polinom uzayında üç polinom $P_1(x) = x^2 - 1$, $P_2(x) = x^2 + x - 2$ ve $P_3(x) = x^2 + 3x + 2$ olarak verilmiş olsun. Bu polinomların lineer bağımlı olup olmadıklarını gösterin.

Çözüm 5.2 Bu polinomların Wronskiyeni yazılır ve birinci satıra göre açılırsa

$$\begin{aligned}
W &= det\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ P_1' & P_2' & P_3' \\ P_1'' & P_2'' & P_3'' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x^2-1 & x^2+x-2 & x^2+3x+2 \\ 2x & 2x+1 & 2x+3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \left(x^2-1\right)\left[2\left(2x+1\right)-2\left(2x+3\right)\right]+\left(x^2+x-2\right)\left[2\left(2x+3\right)-2\left(2x\right)\right] \\
&\quad +\left(x^2+3x+2\right)\left[2\left(2x\right)-2\left(2x+1\right)\right] \\
&= \left(-4\right)\left(x^2-1\right)+6\left(x^2+x-2\right)+\left(-2\right)\left(x^2+3x+2\right) \\
&= -4x^2+4+6x^2+6x-12-2x^2-6x-4=-12\neq 0
\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre bu polinomlar lineer bağımsızdır.■

Bir vektör uzayında bulunabilecek lineer bağımsız vektörlerin maksimum sayısına söz konusu vektör uzayının boyutu denir. n boyutlu bir vektör uzayında maksimum n tane lineer bağımsız vektör vardır. Bunlar söz konusu vektör uzayının baz vektörleri olup uzayı gerdiği söylenir. Bu n tane vektör dışında yazılacak herhangi bir $(n+1)$. vektör lineer bağımlı olur ve (5.14) eşitliğine göre

$$\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\alpha_3\mathbf{a}_3+....+\alpha_n\mathbf{a}_n+\alpha_{n+1}\mathbf{a}_{n+1}=\mathbf{0}$$

yazılabilir. Buradan $\mathbf{a}_{n+1}$ vektörü

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1}\mathbf{a}_{n+1} &= -\alpha_1\mathbf{a}_1-\alpha_2\mathbf{a}_2-\alpha_3\mathbf{a}_3-....-\alpha_n\mathbf{a}_n \\
\mathbf{a}_{n+1} &= \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}}\right)\mathbf{a}_1+\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}}\right)\mathbf{a}_2+\left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_{n+1}}\right)\mathbf{a}_3 \\
&\quad +...+\left(-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n+1}}\right)\mathbf{a}_{n-1}+\left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right)\mathbf{a}_n
\end{aligned} \tag{5.16}$$

biçiminde $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,...,\mathbf{a}_n$ baz vektörlerin bir lineer bileşimi olarak yazılabilir. $-\frac{\alpha_i}{\alpha_{n+1}}$ katsayıları $\mathbf{a}_{n+1}$ vektörünün $\mathbf{a}_i$ bazındaki bileşenleridir. Bundan sonra sıklıkla kullanmak üzere keyfi bir $\mathbf{x}$ vektörünü

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+x_3\mathbf{a}_3+...+x_n\mathbf{a}_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\mathbf{a}_i \tag{5.17}$$

şeklinde yazacağız. Burada x_i'ler (5.16)'daki $-\frac{\alpha_i}{\alpha_{n+1}}$'lere karşılık gelen bileşenlerdir.

Bir vektör uzayında, lineer bağımlı oldukları bilinen bir dizi vektörden kaç tanesinin lineer bağımsız olduğunu tespit etmenin bir yolu şudur: Söz konusu vektörlerin bileşenlerini satır düzeninde yazarak, bir matris elde etmek ve rankını bulmaktır. Temel satır işlemleri yapılarak bu matris indirgenirse, elemanları sıfırdan farklı olan satırların sayısı matrisin rankıdır ve lineer bağımsız vektörlerin sayısını verir. Bunu bir örnekle izah edelim.

Örnek 5.3 3 boyutlu vektör uzayında $\mathbf{a}_1 = \mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$, $\mathbf{a}_2 = 4\mathbf{i}+5\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ ve $\mathbf{a}_3 = 7\mathbf{i}+8\mathbf{j}+9\mathbf{k}$ vektörleri veriliyor. Lineer bağımsız vektörlerin sayısını bulun.

Çözüm 5.3 Vektörlerin bileşenleri satır düzeninde yazılırsa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. $detA = 0$ olduğundan, bu vektörler lineer bağımlıdır. Aşağıda verilen temel satır satır işlemleri yapılırsa

1. Birinci satırı -7 ile çarpıp üçüncü satıra ekle

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \overset{-7(1)+(3)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

2. Birinci satırı -4 ile çarpıp ikinci satıra ekle

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \overset{-4(1)+(2)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

3. İkinci satırı -2 ile çarpıp üçüncü satıra ekle

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \overset{-2(2)+(3)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. İkinci satırı $-\frac{1}{3}$ ile çarp

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{-\frac{1}{3}(2)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. İkinci satırı -2 ile çarpıp birinci satıra ekle

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{-2(2)+(1)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Burada *4.* işlem, ikinci satırı en küçük sayılarla temsil için yapıldı. *5.* işlem ise birinci satırı sıfır yapma çabasıdır. Çünkü ilk üç adımda sadece ikinci ve üçüncü satırlara yoğunlaştık. Yapılabilecek satır işlemleri farklı olabileceğinden indirgemeden sonra farklı elemanlı sütunlar bulunabilir. Bu noktada bir keyfilik vardır. Ancak amacımız matrisi bol

sıfırlı ve küçük rakamlı biçime indirgemektir. Tüm elemanları sıfır olan üçüncü satır hariç tutulursa, sadece iki satırın tüm elemanları sıfır değildir. Sonuç olarak A matrisinin rankı 2'dir. Yani lineer bağımsız vektörlerin sayısı 2'dir. Bu vektör uzayının iki bazı vardır.■

5.3 Skaler Çarpım, Bir Vektörün Normu ve Ortonormal Baz Vektörleri

Bir V vektör uzayında ket temsilinde yazılmış $|\,x\,\rangle$ ve $|\,y\,\rangle$ vektörlerinin skaler çarpımı $\langle x\ |y\rangle$ şeklindedir. Skaler çarpıma iç çarpım da denir. Skaler çarpımın sonucu reel veya kompleks bir skalerdir. $|\,x\rangle$ ve $|\,y\,\rangle$ vektörlerinin iç çarpımı

$$\langle x\ |y\rangle = \begin{pmatrix} x_1^* & x_2^* & \ldots & x_n^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1^* y_1 + x_2^* y_2 + \ldots + x_n^* y_n \quad (5.18)$$

şeklindedir. Eğer $|\,x\,\rangle$, $|\,y\,\rangle$, $|\,w\,\rangle$ vektörleri ve α, β skalerleri için

i. $\langle x\ |y\rangle = \langle y\ |x\rangle^*$

ii. $\langle w\ |\alpha x + \beta y\rangle = \alpha\langle w\ |x\rangle + \beta\langle w\ |y\rangle$

iii. $\langle \alpha x + \beta y\ |w\rangle = \alpha^*\langle x\,|w\rangle + \beta^*\langle y\ |w\rangle$

iv. $|\,x\,\rangle \neq 0$ olmak üzere $\langle x\ |x\rangle \geq 0$

ile verilen iç çarpım özellikleri sağlanıyorsa bu vektör uzayına, metrik uzay denir.

Bir $|\,x\,\rangle$ vektörün normu

$$|x| = \sqrt{\langle x\ |x\rangle} = \sqrt{x_1^* x_1 + x_2^* x_2 + \ldots + x_n^* x_n} \quad (5.19)$$

şeklinde tanımlanan pozitif değerli bir skalerdir. $|\,x\,\rangle$ ve $|\,y\,\rangle$ vektörleri için

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliği geçerlidir. $[a, b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon uzayında verilen $\psi_1(x) = |\psi_1\rangle$ ve $\psi_2(x) = |\psi_2\rangle$ gibi iki vektörün iç çarpımı

$$\langle \psi_1\ |\psi_2\rangle = \int_a^b \psi_1^*(x)\psi_2(x)dx \quad (5.20)$$

olarak tanımlanır. $|\psi\rangle$ vektörünün normu

$$\langle \psi\ |\psi\rangle = \int_a^b \psi^*(x)\psi(x)dx \quad (5.21)$$

olur. Matris uzayında A ve B matrislerinin iç çarpımı, çarpım matrisin izine eşittir.

$$\langle A \mid B \rangle = \dot{I}z\,(AB) \tag{5.22}$$

Bir vektörü (5.17) ifadesindeki gibi $\mathbf{a}_i$ bazında yazmak yerine, boyları 1 olan ve birbirine dik ortonormal baz vektörleri cinsinden yazmak daha kullanışlıdır. n boyutlu vektör uzayında birim vektörler $|e_1\rangle, |e_2\rangle, ..., |e_n\rangle$ ket temsili ile

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., |e_n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

biçiminde yazılır. Birim vektörler arasında

$$\langle e_i \mid e_j \rangle = \delta_{ij} \tag{5.24}$$

ortonormalize bağıntısı vardır. Bir $|x\rangle$ vektörü ortonormal baz vektörleri cinsinden

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\,|e_i\rangle = x_1\,|e_1\rangle + x_2\,|e_2\rangle + ... + x_n\,|e_n\rangle \tag{5.25}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade (5.12) ifadesine özdeştir ve (5.1) ile aynı anlamdadır. Sadece temsilleri farklıdır. $|x\rangle$ vektörünün x_i bileşeni

$$x_i = \langle e_i \mid x \rangle \tag{5.26}$$

skaler çarpımı ile bulunur. Fonksiyonlar uzayında $|\psi_1\rangle$ ve $|\psi_2\rangle$ vektörleri

$$\langle \psi_1 \mid \psi_2 \rangle = \int_a^b \psi_1^*(x)\psi_2(x)dx = \delta_{ij} \tag{5.27}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde normalize edilebilirler. Normalize $|\psi_1\rangle$ ve $|\psi_2\rangle$ vektörleri, baz vektörleri hükmündedir. Matris uzayında, örneğin 2×2 boyutlu reel matris uzayında

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } |4\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisleri bu uzayının baz vektörleridir. Keyfi bir 2×2 boyutlu reel matris, bu dört baz vektörü cinsinden

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\,|1\rangle + b\,|2\rangle + c\,|3\rangle + d\,|4\rangle$$

olarak yazılabilir.

Örnek 5.4 Kompleks bir vektör $|v\rangle = \begin{pmatrix} 1+i & 1 & -1 & 1-i \end{pmatrix}^T$ olarak verilmiştir. Bu vektörü normalize edin.

Çözüm 5.4

$$\begin{aligned}
\langle v\,|v\rangle &= \begin{pmatrix} 1-i & 1 & -1 & 1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ -1 \\ 1-i \end{pmatrix} \\
&= [(1-i)(1+i) + (1)(1) + (-1)(-1) + (1+i)(1-i)] \\
&= \left(1+i-i-i^2\right) + 1 + 1 + \left(1-i+i-i^2\right) \\
&= 2+1+1+2 = 6 \Rightarrow |v| = \sqrt{\langle v\,|v\rangle} = \sqrt{6}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $i^2 = -1$ değeri kullanıldı. Böylece normlanmış $|v\rangle$

$$|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1+i & 1 & -1 & 1-i \end{pmatrix}^T$$

olarak bulunur.■

5.4 Gram-Schmidt Ortogonalleştirme Yöntemi

Gram-Schmidt yöntemi, verilen n tane lineer bağımsız vektörden n tane ortonormal vektör üreten bir yöntemdir. n boyutlu vektör uzayında n tane $|a_1\rangle, |a_2\rangle, |a_3\rangle, ..., |a_n\rangle$ lineer bağımsız vektör verilmiş olsun. Gram-Schmidt yöntemi kısaca şöyledir:

Vektörlerden birincisi normlanır. Burada birinci vektör $|a_1\rangle$'dir. Başka bir vektörle başlanabilir, ancak sonuçları farklı olur. Seçilen vektör referans alınarak diğer vektörler buna dik hale getirilmektedir. Bu keyfiliğe dikkat etmek lazımdır. Normalizasyon sabitini N_1 ile gösterirsek, normlanmış vektör

$$|u_1\rangle = \frac{1}{N_1}|a_1\rangle, \quad N_1 = \sqrt{\langle a_1\,|a_1\rangle}$$

olur. Sonra $|a_2\rangle$ vektörünü $|u_1\rangle$ vektörüne dik hale getirmek için

$$|a_2'\rangle = |a_2\rangle - \langle a_2\,|u_1\rangle\,|u_1\rangle$$

işlemi yapılır. Burada $\langle a_2\,|u_1\rangle$ çarpımı, $|a_2\rangle$ vektörünün $|u_1\rangle$ yönündeki bileşenidir. Bu bileşen $|u_1\rangle$ ile çarpılarak, $|u_1\rangle$ yönündeki $\langle a_2\,|u_1\rangle\,|u_1\rangle$ vektör elde edilmektedir. Çıkarma işlemi yapıldıktan sonra artık $|a_2\rangle$ vektörünün $|u_1\rangle$ yönünde bileşeni kalmaz. Elde edilen vektör $|a_2'\rangle$ ile gösterilir ve normlanırsa

$$|u_2\rangle = \frac{1}{N_2}|a_2'\rangle, \quad N_2 = \sqrt{\langle a_2'\,|a_2'\rangle}$$

elde edilir. $|a_3\rangle$ vektörünün hem $|u_1\rangle$'e hem de $|u_2\rangle$'ye dik olması gerekir. Bunun için $|a_3\rangle$ vektörünün $|u_1\rangle$ ve $|u_2\rangle$ yönündeki bileşenlerden arındırılması gerekir. Bu işlemden sonra $|a_3'\rangle$

$$|a_3'\rangle = |a_3\rangle - \langle a_3 | u_1 \rangle |u_1\rangle - \langle a_3 | u_2 \rangle |u_2\rangle$$

bulunur. Elde edilen $|a_3'\rangle$ vektörü normlanırsa

$$|u_3\rangle = \frac{1}{N_3} |a_3'\rangle, \quad N_3 = \sqrt{\langle a_3' \, | a_3' \rangle}$$

üçüncü ortonormal vektör olan $|u_3\rangle$ elde edilir. Gram-Schmidt yöntemi ile $|u_i\rangle$ için

$$|a_i'\rangle = |a_i\rangle - \langle a_i | u_1 \rangle |u_1\rangle - \langle a_i | u_2 \rangle |u_2\rangle - ... - \langle a_i | u_{i-1} \rangle |u_{i-1}\rangle$$

$$|a_i'\rangle = |a_i\rangle - \sum_{j=1}^{i-1} \langle a_i | u_j \rangle |u_j\rangle \tag{5.28a}$$

$$|u_i\rangle = \frac{1}{N_i} |a_i'\rangle \tag{5.28b}$$

$$N_i = \sqrt{\langle a_i' \, | a_i' \rangle} \tag{5.28c}$$

ifadeleri bulunur. Sonuç olarak $|a_1\rangle, |a_2\rangle, |a_3\rangle, ..., |a_n\rangle$ lineer bağımsız vektörlerden yola çıkılarak $|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle, ..., |u_n\rangle$ ortonormal vektörler elde edilmiş olur.

Örnek 5.5 Kartezyen koordinatlarda $\mathbf{a}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ olarak verilen vektörlerin lineer bağımsız olduklarını gösterdikten sonra Gram-Schmidt yöntemi ile $\mathbf{a}_1$'den başlayarak ortonormal $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ ve $\mathbf{u}_3$ baz vektörlerini elde edin.

Çözüm 5.5

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

olduğundan verilen vektörler lineer bağımsızdır. Bu örnekte birinci bölümden aşina olduğumuz temsiller kullanıldı. Buna göre, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ ve $\mathbf{u}_3$ için

$$N_1 = \sqrt{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1} = \sqrt{(\mathbf{i} + \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{k})} = \sqrt{2} \Rightarrow \mathbf{u}_1 = \frac{1}{N_1}\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{i} + \mathbf{k})$$

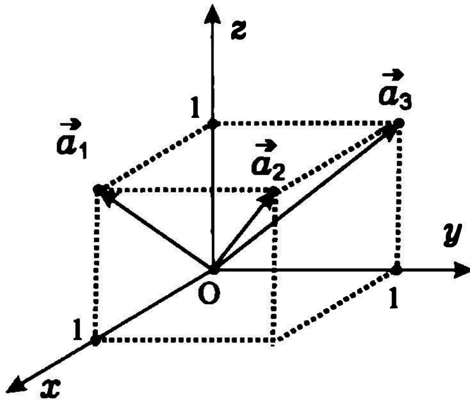
$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2' &= \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{u}_1 &= (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{i} + \mathbf{k}) = \frac{2}{\sqrt{2}} \\ (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 &= \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{i} + \mathbf{k}) = \mathbf{i} + \mathbf{k} \\ \mathbf{a}_2' &= \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} - (\mathbf{i} + \mathbf{k}) = \mathbf{j} \end{aligned}$$

$$N_2 = \sqrt{\mathbf{a}_2' \cdot \mathbf{a}_2'} = 1 \Rightarrow \mathbf{u}_2 = \frac{1}{N_2}\mathbf{a}_2' = \mathbf{j}$$

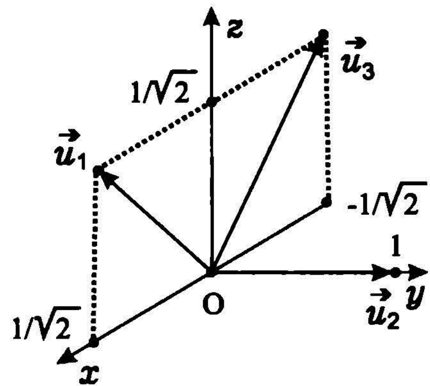
$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_3' &= \mathbf{a}_3 - (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 \\
\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{u}_1 &= (\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
(\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{k}) = \frac{1}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{k}) \\
\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{u}_2 &= (\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{j} = 1, (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 = \mathbf{j} \\
\mathbf{a}_3' &= \mathbf{j} + \mathbf{k} - \frac{1}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{k}) - \mathbf{j} = \frac{1}{2}(-\mathbf{i} + \mathbf{k})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_3 &= \sqrt{\mathbf{a}_3' \cdot \mathbf{a}_3'} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\mathbf{u}_3 &= \frac{1}{N_3}\mathbf{a}_3' = \sqrt{2} \times \frac{1}{2}(-\mathbf{i} + \mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i} + \mathbf{k})
\end{aligned}$$

olarak bulunur. $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ ve $\mathbf{u}_3$ vektörlerinin ortogonal ve normalize olduğu gösterilebilir. $\mathbf{a}_1$,$\mathbf{a}_2$ ve $\mathbf{a}_3$ vektörleri Şekil 5.1a'da,$\mathbf{u}_1$,$\mathbf{u}_2$ve $\mathbf{u}_3$ vektörleri ise Şekil 5.1b'de verilmiştir.



Şekil 5.1a $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ ve $\mathbf{a}_3$ vektörleri



Şekil 5.1b $\mathbf{u}_1$,$\mathbf{u}_2$ ve $\mathbf{u}_3$ vektörleri

Örnek 5.6 Gram-Schmidt yöntemini kullanarak $|a_1\rangle = (2, 4, -4)$, $|a_2\rangle = (-3, 6, 0)$ ve $|a_3\rangle = (7, 2, 1)$ olarak verilen lineer bağımsız vektörlerden üç tane ortonormal baz vektörü bulun.

Çözüm 5.6 Gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
N_1 &= \sqrt{\langle a_1 \ |a_1\rangle} = \sqrt{2 \times 2 + 4 \times 4 + (-4)(-4)} = \sqrt{36} = 6 \\
|u_1\rangle &= \frac{1}{N_1}|a_1\rangle = \left(\frac{2}{6}, \frac{4}{6}, -\frac{4}{6}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|a_2'\rangle &= |a_2\rangle - \langle a_2 | u_1 \rangle |u_1\rangle \\
\langle a_2 | u_1 \rangle &= \left(-3 \times \frac{1}{3}\right) + \left(6 \times \frac{2}{3}\right) + \left(0 \times \left(-\frac{2}{3}\right)\right) = 3 \\
|a_2'\rangle &= (-3, 6, 0) - 3\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = (-4, 4, 2) \\
N_2 &= \sqrt{\langle a_2' \, | a_2' \rangle} = 6 \Rightarrow |u_2\rangle = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|a_3'\rangle &= |a_3\rangle - \langle a_3 | u_1 \rangle |u_1\rangle - \langle a_3 | u_2 \rangle |u_2\rangle \\
\langle a_3 | u_1 \rangle &= 3, \ \langle a_3 | u_2 \rangle = -3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|a_3'\rangle &= (7, 2, 1) - 3\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) + 3\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\
|a_3'\rangle &= (4, 2, 4) \\
N_3 &= \sqrt{\langle a_3' \, | a_3' \rangle} = 6 \Rightarrow |u_3\rangle = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 5.7 $[-1, 1]$ aralığında tanımlı fonksiyon uzayında verilen $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ ve $f_3(x) = x^2$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olduklarını göstererek bir ortonormal baz kümesi elde edin.

Çözüm 5.7 Fonksiyonların Wronskiyeni

$$W = det \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

olduğundan fonksiyonlar lineer bağımsızdır. Önce $f_1(x)$ normlanırsa $u_1(x)$

$$\begin{aligned}
N_1^2 &= \langle f_1 \, | f_1 \rangle = \int_{-1}^{1} f_1^* f_1 dx = \int_{-1}^{1} dx = x \,|_{-1}^{1} = 2 \Rightarrow N_1 = \sqrt{2} \\
u_1(x) &= \frac{1}{N_1} f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. $u_2(x)$ için işlem yapılırsa

$$
\begin{aligned}
f_2'(x) &= f_2(x) - \langle f_2 \ | u_1 \rangle \, u_1(x) \\
\langle f_2 \ | u_1 \rangle &= \int_{-1}^{1} f_2^* u_1 dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}} x dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} x^2 \Big|_{-1}^{1} = 0 \\
f_2'(x) &= f_2(x) = x \\
N_2^2 &= \langle f_2'(x) \ | f_2'(x) \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \Rightarrow N_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \\
u_2(x) &= \frac{1}{N_2} f_2' = \sqrt{\frac{3}{2}} x
\end{aligned}
$$

olur. Burada $f_2'(x)$ türev anlamında değildir. $u_1(x)$'e dik hale getirilmiş ikinci fonksiyondur. Son olarak $u_3(x)$ için işlem yapılırsa

$$
\begin{aligned}
f_3'(x) &= f_3(x) - \langle f_3 \ | u_1 \rangle \, u_1(x) - \langle f_3 \ | u_2 \rangle \, u_2(x) \\
\langle f_3 \ | u_1 \rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}} x^2 dx = \frac{1}{3\sqrt{2}} x^3 \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle f_3 \ | u_2 \rangle &= \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3}{2}} x^3 dx = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^{1} = 0 \\
f_3'(x) &= x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{1}{\sqrt{2}} = x^2 - \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N_3^2 &= \langle f_3'(x) \ | f_3'(x) \rangle = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right)^2 dx = \int_{-1}^{1} \left(x^4 - \frac{2}{3} x^2 + \frac{1}{9} \right) dx \\
&= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2}{9} x^3 + \frac{1}{9} x \right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45} \\
N_3 &= \sqrt{\frac{8}{45}} \Rightarrow u_3(x) = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right)
\end{aligned}
$$

bulunur.

Örnek 5.8 $[0, 2\pi]$ aralığında tanımlı fonksiyon uzayında verilen $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = Sinx$ ve $f_3(x) = Cosx$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olduklarını göstererek, bir ortonormal baz fonksiyonu kümesi elde edin.

Çözüm 5.8 Bu fonksiyonların Wronskiyeni

$$W = det\begin{pmatrix} 1 & Sinx & Cosx \\ 0 & Cosx & -Sinx \\ 0 & -Sinx & -Cosx \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

olduğundan fonksiyonlar lineer bağımsızdır. $f_1(x) = 1$ normlanırsa

$$N_1^2 = \langle f_1 \mid f_1 \rangle = \int_0^{2\pi} dx = x \mid_0^{2\pi} = 2\pi \Rightarrow u_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

bulunur. $f_2(x)$ için işlem yapılırsa

$$\begin{aligned} \langle f_2 \mid u_1 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} Sinx dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} Cosx \mid_0^{2\pi} = 0 \\ f_2'(x) &= f_2(x) - \langle f_2 \mid u_1 \rangle \, u_1(x) = Sinx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_2^2 &= \langle f_2' \mid f_2' \rangle = \int_0^{2\pi} Sin^2(x) dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - Cos2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{Sin2x}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi \\ N_2 &= \sqrt{\pi} \Rightarrow u_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} Sinx \end{aligned}$$

bulunur. Burada $Sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - Cos2x)$ açılımı kullanıldı. Bu kez $f_3(x) = Cosx$ için işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \langle f_3 \mid u_1 \rangle &= \langle f_3 \mid u_2 \rangle = 0 \\ f_3'(x) &= f_3(x) = Cosx \\ N_3 &= \sqrt{\pi} \Rightarrow u_3(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} Cosx \end{aligned}$$

olarak bulunur.■

5.5 Lineer İşlemciler ve İşlemcilerin Matris Temsili

Bölümün başından buraya kadar bir çok lineer vektör uzayının tanımlanabileceğini gördük. Bir vektör uzayından diğer bir vektör uzayına geçmek gerekebilir. V ve W aynı skalerler üzerinde tanımlanmış iki vektör uzayı olsun. V vektör uzayındaki her bir vektörü, W vektör uzayında bir tek vektöre karşılık getiren bir fonksiyon A olsun. Bu durumda

$$A : V \rightarrow W$$

şeklinde bir dönüşümdür. W vektör uzayındaki $|w\rangle$ vektörüne, V vektör uzayındaki $|v\rangle$ vektörünün A dönüşümü altındaki görüntüsü denir ve

$$|w\rangle = A\,|v\rangle \tag{5.29}$$

biçiminde yazılır. $|u\rangle$ ve $|v\rangle$, V vektör uzayında iki vektör, α ve β skalerler olmak üzere A dönüşümü

$$A\,(\alpha\,|u\rangle + \beta\,|v\rangle) = \alpha A\,|u\rangle + \beta A\,|v\rangle \tag{5.30}$$

özdeşliğini sağlıyorsa, A dönüşümüne lineer dönüşüm denir. Her lineer dönüşüm V 'deki bir toplamı, W'deki bir toplama ve V'deki bir skalerle çarpımı W'deki bir skalerle çarpıma götürür. Yani lineer işlemci, vektör uzayının iki temel işlemi olan vektörlerin toplamını ve bir vektörün bir skalerle çarpımını korur. Lineer vektör uzayında her lineer dönüşüm, bir lineer işlemciye denktir. Bir lineer dönüşüm illaki V uzayından W uzayına olmak zorunda değildir. Eğer dönüşüm $A : V \to V$ şeklinde aynı uzayda kalıyorsa yani kendi üzerine bir dönüşüm ise yine de A, V uzayında bir lineer işlemcidir. Operatör ile işlemci aynı anlamdadır. Bir işlemci bir vektöre etkisiyle değerlendirilir.

Lineer İşlemcilere Örnekler

1. İki boyutlu E_2 Öklid uzayında bir vektörü, pozitif yönde θ açısı kadar döndüren işlemci, $R(\theta)$ lineerdir.

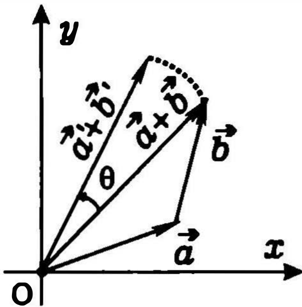
İspat: İki boyutlu Öklid uzayında **a** ve **b** iki vektör olmak üzere $R(\theta)$ işlemcisinin bu vektörlere etkisi

$$\begin{aligned} R(\theta)\mathbf{a} &= \mathbf{a}' \\ R(\theta)\mathbf{b} &= \mathbf{b}' \end{aligned}$$

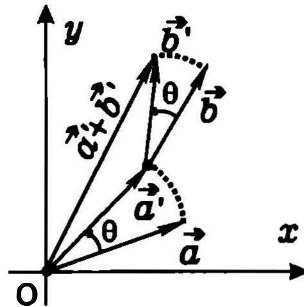
şeklinde olsun. $R(\theta)$'nın $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ toplamına etkisi

$$R(\theta)\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = R(\theta)\mathbf{a} + R(\theta)\mathbf{b} = \mathbf{a}' + \mathbf{b}'$$

bulunur. $R(\theta)\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = R(\theta)\mathbf{a} + R(\theta)\mathbf{b}$ olduğundan $R(\theta)$ işlemcisi lineerdir.



Şekil 5.2a Toplam vektörün dönmesi



Şekil 5.2b Dönmüş vektörlerin toplamı

Şekil 5.2a ve Şekil 5.2b'den görülebileceği üzere $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ toplam vektörü θ kadar döndürmek ile $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ vektörlerini ayrı ayrı θ kadar döndürüp sonra onları toplamak özdeştir.

2. Üç boyutlu kartezyen koordinatlarda bir vektörü (x, y) düzlemine dik izdüşüren A işlemcisi lineerdir.

İspat: A izdüşüm işlemcisinin $|a\rangle = (x, y, z)$ ve $|b\rangle = (x', y', z')$ vektörlerine etkisi

$$\begin{aligned} A\,|a\rangle &= A\,(x, y, z) = (x, y, 0) = |a'\rangle \\ A\,|b\rangle &= A\,(x', y', z') = (x', y', 0) = |b'\rangle \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. A'nın $|a\rangle + |b\rangle$ toplam vektöre etkisi

$$\begin{aligned} A\,(|a\rangle + |b\rangle) &= A\left(x+x', y+y', z+z'\right) = \left(x+x', y+y', 0\right) \\ &= (x, y, 0) + (x', y', 0) = |a'\rangle + |b'\rangle \end{aligned}$$

olur. $A\,(|a\rangle + |b\rangle) = A\,|a\rangle + A\,|b\rangle$ olduğundan A lineerdir.

3. İki boyutlu E_2 Öklid uzayında bir vektörü öteleyen işlemci lineer değildir.

İspat: Bu işlemciye T diyelim. T öteleme işlemcisi iki boyutlu Öklid uzayında $|a\rangle = (x, y)$ ve $|b\rangle = (x', y')$ vektörlerini $|t\rangle = (x'', y'')$ kadar ötelemişse

$$\begin{aligned} T\,|a\rangle &= T(x, y) = (x+x'', y+y'') = (x, y) + (x'', y'') = |a\rangle + |t\rangle \\ T\,|b\rangle &= T(x', y') = (x'+x'', y'+y'') = (x', y') + (x'', y'') = |b\rangle + |t\rangle \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Diğer yandan T'nin $|a\rangle + |b\rangle$ toplam vektöre etkisi

$$\begin{aligned} T(|a\rangle + |b\rangle) &= T(x+x', y+y') = (x+x'+x'', y+y'+y'') \\ &= (x, y) + (x', y') + (x'', y'') = |a\rangle + |b\rangle + |t\rangle \end{aligned}$$

olur. $T(|a\rangle + |b\rangle) \neq T\,|a\rangle + T\,|b\rangle$ olduğundan T öteleme işlemcisi lineer değildir.

4. $[a, b]$ aralığında türevlenebilir fonksiyon uzayında D türev işlemcisi lineerdir.

İspat: α, β skalerler olmak üzere $D = \frac{d}{dx}$ türev işlemcisinin $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonlarına etkisi

$$\begin{aligned} D\,(\alpha f_1(x)) &= \alpha \frac{df_1(x)}{dx} = \alpha f_1'(x) \\ D\,(\beta f_2(x)) &= \beta \frac{df_2(x)}{dx} = \beta f_2'(x) \end{aligned}$$

şeklindedir. $D = \frac{d}{dx}$ türev işlemcisinin $\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$ toplamına etkisi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\,(\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)) &= \frac{d}{dx}\,(\alpha f_1(x)) + \frac{d}{dx}\,(\beta f_2(x)) \\ &= \alpha \frac{df_1(x)}{dx} + \beta \frac{df_2(x)}{dx} = \alpha f_1'(x) + \beta f_2'(x) \end{aligned}$$

olur. $D(\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)) = \alpha Df_1(x)+\beta Df_2(x)$ olduğundan D türev işlemcisi lineerdir. Ancak türevi alınan fonksiyonun yine fonksiyon uzayının bir elemanı kalması gerektiğini belirtelim. D^n; n. mertebeden türev işlemcisinin lineer olabilmesi için n defa türetilen fonksiyonların yine fonksiyon uzayının elemanı olması, yani kapalılık özelliğini sağlaması gerekir.

5. $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyon uzayında integral alan işlemci $Int\,(f(x)) = \int_a^b f(x)dx$ lineerdir.

İspat: α, β skalerler olmak üzere $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonlarının integrali

$$\begin{aligned} Int\,(\alpha f_1(x)) &= \int_a^b (\alpha f_1(x))\,dx = \alpha\int_a^b f_1(x)dx \\ Int\,(\beta f_2(x)) &= \int_a^b (\beta f_2(x))\,dx = \beta\int_a^b f_2(x)dx \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Toplamın integraline bakalım:

$$\begin{aligned} Int\,(\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)) &= \int_a^b [\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)]\,dx = \int_a^b \alpha f_1(x)dx \\ +\int_a^b \beta f_2(x)dx &= \alpha\int_a^b f_1(x)dx + \beta\int_a^b f_2(x)dx \end{aligned}$$

olur. $Int\,(\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)) = \alpha\ Int\,(f_1(x)) + \beta\ Int\,(f_2(x))$ olduğundan integral alan işlemci lineerdir.

A ve B, lineer vektör uzayı V 'de iki işlemci, $|a\rangle$ ise bir vektör olmak üzere aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

i. İki işlemcinin eşitliği: Eğer A işlemcisinin $|a\rangle$ vektörlerine etkisi ile B işlemcisin $|a\rangle$ vektörüne etkisi

$$A\,|a_i\rangle = B\,|a_i\rangle\,,\ \text{tüm}\ |a_i\rangle \in V \Rightarrow A = B \tag{5.31}$$

ise, işlemciler eşittir.

ii. Dağılma özelliği: $(A+B)\,|a\rangle = A\,|a\rangle + B\,|a\rangle$, iki işlemcinin toplamının $|a\rangle$ vektörüne etkisi, ayrı ayrı etkileri toplamına eşittir.

iii. İki işlemcinin çarpımı: $(AB)\,|a\rangle = A\,(B\,|a\rangle)$, iki işlemcinin çarpımının $|a\rangle$ vektörüne etkisi, önce B'nin sonra A'nın etkisine eşittir. Burada işlemcilerin etki sıralamasının değiştirilmediğine dikkat edelim. Eğer işlemcilerin sıra değiştirme özelliği varsa yani $[A,B] = AB - BA = 0$ ise, işlem sırasının önemi yoktur.

iv. Çarpımın toplama üzerine dağılma özelliği: $A(B+C)|a\rangle = AB|a\rangle + AC|a\rangle$.

v. İşlemcilerin fonksiyonları, toplama ve çarpma işlemleri kullanılarak yazılabilir: Örnek olarak A^n ve e^{-A} işlemcilerini ele alalım.

$$\begin{aligned} A^2 &= AA, \; A^3 = AAA, \; A^n \equiv \underbrace{AA....A}_{n \;\; tane} \\ e^{-A} &\equiv 1 - A + \frac{1}{2!}A^2 - \frac{1}{3!}A^3 + ... \end{aligned}$$

Burada e^{-A} işlemcisi için Taylor serisi yazıldı. Lineer işlemcilerin fonksiyonu olan işlemcilerin de lineer olduğunu belirtmekte yarar var.

Özel Bazı İşlemciler

1. Birim İşlemci: Bir $|a\rangle$ vektörüne etkidiğinde onu değiştirmeyen işlemcidir.

$$I|a\rangle = |a\rangle \tag{5.32}$$

I birim işlemcinin önemli bir özelliği, herhangi bir A işlemcisi ile sıra değiştirmesidir.

$$[A, I]|a\rangle = AI|a\rangle - IA|a\rangle = 0$$

2. Parite İşlemcisi: Konum vektörüne bağlı bir fonksiyonda $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$ dönüşümü yapan işlemcidir. Parite işlemcisini P ile gösterirsek

$$P|\psi(\mathbf{r})\rangle = |\psi(-\mathbf{r})\rangle \tag{5.33}$$

yazılabilir. Bu işlem sonunda $|\psi(-\mathbf{r})\rangle$ fonksiyonu $|\psi(\mathbf{r})\rangle$ gibi kalabilir veya işaret değiştirebilir. Parite işlemi sonucu işareti değiştirmeyen fonksiyona çift pariteli, işaret değiştirene ise tek pariteli denir.

$$|\psi(-\mathbf{r})\rangle = \begin{cases} |\psi(\mathbf{r})\rangle, & \text{çift pariteli} \\ -|\psi(\mathbf{r})\rangle, & \text{tek pariteli} \end{cases}$$

3. Projeksiyon(İz düşüm) İşlemcileri: Bir $|\psi\rangle$ vektörü $|u_i\rangle$ baz vektörleri cinsinden

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i |u_i\rangle$$

verilmiş olsun. Burada c_i katsayıları, $|\psi\rangle$ vektörünün $|u_i\rangle$ baz vektörü yönündeki bileşenidir. Projeksiyon işlemcisi P ile gösterilir. Karışıklığı önlemek için projeksiyon için başka harfler kullanılabilirdi. Fakat bu çok

önemli değil. İzdüşüm işlemcisi P_j, bir $|\psi\rangle$ vektörüne etki ederek onun $|u_j\rangle$ yönündeki bileşenini seçip ayırır.

$$P_j\,|\psi\rangle = c_j\,|u_j\rangle \tag{5.34}$$

Birden çok vektör bileşeni olduğundan P'yi j ile indisledik. (5.34) ile verilen ifade $|u_j\rangle$ ile iç çarpılırsa

$$\langle\, u_j\,|\,P_j\,|\psi\rangle = c_j\,\langle u_j\;\;|u_j\,\rangle = c_j$$

$|u_j\rangle$ yönündeki vektör bileşeninin büyüklüğü bulunur.

4. Ters (İnvers) İşlemci: Bir A işlemcisi bir $|u\rangle$ vektörünü $|v\rangle$ vektörüne dönüştürmüş ise

$$A\,|u\rangle = |v\rangle \tag{5.35}$$

yazılabilir. A işlemcisinin etkisini geri alan bir işlemci varsa buna ters işlemci denir ve A^{-1} ile gösterilir. Her işlemcinin ters işlemcisi olmayabilir. Tersi olmayan işlemciye tekil işlemci denir. Eğer varsa A^{-1} işlemcisi, A işlemcisinin yaptığı etkinin tersini yaparak $|v\rangle$ vektörünü tekrar $|u\rangle$ vektörüne dönüştürür:

$$A^{-1}\,|v\rangle = |u\rangle \tag{5.36}$$

Bu iki eşitlik birleştirilirse

$$\begin{aligned} A^{-1}\,|v\rangle &= A^{-1}A\,|u\rangle = |u\rangle \\ A\,|u\rangle &= AA^{-1}\,|v\rangle = |v\rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre $A^{-1}A$ işlemcileri $|u\rangle$ vektörüne etki ederek yine $|u\rangle$ vektörünü veya AA^{-1} işlemcileri $|v\rangle$ vektörüne etki ederek yine $|v\rangle$ vektörünü elde ettiğine göre $A^{-1}A$ ve AA^{-1} çarpım işlemcileri birim işlemci etkisi yapmaktadır. Birim işlemci etkisi yapmakla birlikte $A^{-1}A$ ve AA^{-1} çarpımları her zaman eşit olmayabilirler. Ancak genel olarak

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I \tag{5.37}$$

sonucu yazılabilir. Örneğin, bir **a** vektörünü pozitif θ kadar döndüren işlemci $R(\theta)$'nın ters işlemcisi, bir vektörü θ kadar ters yöne döndüren

$$R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$$

işlemcisidir. Bir vektör önce saat ibresi tersi yönünde θ kadar dönürülür ve sonra dönmüş vektör saat ibresi yönünde θ kadar döndürülürse, eski yerine gelir.

Ters işlemciler için aşağıdaki sonuçlar yazılabilir:

i. Eğer A lineer ise A^{-1} lineerdir.

İspat: $|v_1\rangle = A|u_1\rangle$ ve $|v_2\rangle = A|u_2\rangle \Rightarrow |u_1\rangle = A^{-1}|v_1\rangle$ ve $|u_2\rangle = A^{-1}|v_2\rangle$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} A^{-1}(c_1|v_1\rangle + c_2|v_2\rangle) &= A^{-1}(c_1 A|u_1\rangle + c_2 A|u_2\rangle) \\ &= \underbrace{A^{-1}A}_{I}(c_1|u_1\rangle + c_2|u_2\rangle) \\ &= c_1|u_1\rangle + c_2|u_2\rangle \end{aligned}$$

olduğundan A^{-1} lineerdir.

ii. A ve B işlemcilerinin çarpımının tersi için

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \tag{5.38}$$

eşitliği vardır.

İspat: AB işlemcisi ile tersi $(AB)^{-1}$ çarpılırsa

$$AB(AB)^{-1} = I$$

birim işlemci elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafı soldan A^{-1} ile çarpılırsa

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I}B(AB)^{-1} = A^{-1}I \Rightarrow B(AB)^{-1} = A^{-1}$$

olur. Son eşitlik yine soldan B^{-1} ile çarpılırsa

$$\underbrace{B^{-1}B}_{I}(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

bulunur.

5. Hermitik Eşlenik İşlemci, Hermitik(Hermityen) İşlemci

Bir V iç çarpım uzayında A bir işlemci, $|u\rangle$ ve $|v\rangle$ iki vektör olsun. Hermitik eşlenik işlemi skaler çarpımla tanımlanır.

$$\langle u|Av\rangle = \left\langle A^{\dagger}u\,|v\right\rangle \tag{5.39}$$

eşitliğini sağlayan $A^{\dagger}$ işlemcisine A'nın hermitik eşleniği denir. A'nın $|v\rangle$ vektörüne etkisinin $\langle u|$ ile iç çarpımı, $A^{\dagger}$ 'ın $\langle\, u|$ vektörüne etkisinin $|v\rangle$ ile iç çarpımına eşittir. Hermitik eşlenik için

$$\langle v|A|u\rangle^{*} = \left\langle u\middle|A^{\dagger}\middle|v\right\rangle \tag{5.40}$$

tanımını da yapılmaktadır. $A|u\rangle = w$ dersek (5.40)'nin sol tarafı için

$$\langle v|w\rangle^{*} = \langle w|v\rangle \tag{5.41}$$

yazılabilir. (5.41)'in sağ tarafı ile (5.40)'ın sağ tarafı karşılaştırıldığında

$$\langle w| = \langle u|\, A^{\dagger} \Rightarrow (A\,|u\rangle)^{\dagger} = \langle u|\, A^{\dagger}$$

olduğu anlaşılır. Hermitik eşlenik işlemci için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

i. $(A^{\dagger})^{\dagger} = A$
ii. $(A+B)^{\dagger} = A^{\dagger} + B^{\dagger}$
iii. $(cA)^{\dagger} = c^{*}A^{\dagger}$
iv. $(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger}$

Bir A işlemcisi, $A^{\dagger}$ hermitik eşleniğine eşit ise A'ya hermitik(veya hermityen) işlemci, bir işaret farkıyla eşit ise anti hermitik işlemci denir. Buna göre

$$A^{\dagger} = A, \quad A \text{ hermitik ise} \qquad (5.42a)$$
$$A^{\dagger} = -A, \quad A \text{ anti hermitik ise} \qquad (5.42b)$$

olur. Hermitik(antihermitik) bir işlemci için

$$\langle u|\, Av\rangle = \langle Au|\, v\rangle\,, \quad A \text{ hermitik ise} \qquad (5.43a)$$
$$\langle u|\, Av\rangle = -\langle Au|\, v\rangle\,, \quad A \text{ anti hermitik ise} \qquad (5.43b)$$

eşitlikleri yazılabilir. Hermitik işlemcileri H ile göstermek adettir. Hermitik işlemcilerin fizikte özel bir öneme sahip olduğunu belirtelim.

Örnek 5.9 Bir boyutlu fonksiyon uzayında $D = \frac{d}{dx}$ türev işlemcisinin anti hermitik olduğunu gösterin.

Çözüm 5.9 $\psi(x)$ ve $\phi(x)$, $[-\infty, \infty]$ aralığında tanımlı, türevlenebilir iki fonksiyon olsun. $\langle \phi\,|D\psi\,\rangle$ işlemi

$$\langle \phi(x)\,|D\psi(x)\,\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^{*}(x)\frac{d\psi(x)}{dx}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^{*}(x)d\psi(x)$$

şeklinde yazılır. Burada $\phi^{*}(x) = u$, $d\psi(x) = dv$ denirse $du = d\phi^{*}(x)$ ve $v = \psi(x)$ olur. $uv - \int vdu$ kısmi integral yardımı ile

$$\langle \phi(x)\,|D\psi(x)\,\rangle = \phi^{*}(x)\psi(x)\,\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)d\phi^{*}(x)$$

elde edilir. $\psi(x)$ ve $\phi(x)$ fonksiyonlarının $\mp\infty$ 'da 0 olması istenirse, ilk terim sıfır olur. İkinci terim dx ile genişletilirse

$$\begin{aligned}\langle \phi(x)\,|D\psi(x)\rangle &= 0 - \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\frac{d\phi^{*}(x)}{dx}dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\phi(x)}{dx}\right)^{*} \psi(x)dx \\ &= -\langle D\phi(x)\,|\psi(x)\rangle\end{aligned}$$

olduğundan $D = \frac{d}{dx}$ türev işlemcisi anti hermitiktir.

Örnek 5.10 Kuantum mekaniğinde bir boyutlu momentum işlemcisi $p = -i\hbar\frac{d}{dx}$ ile verilir. p işemcisinin hermitik olduğunu gösterin.

Çözüm 5.10 p için işlem yapılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \phi(x) \,| p\psi(x) \rangle &= (-i\hbar) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^*(x) \frac{d\psi(x)}{dx} dx = (-i\hbar) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^*(x) d\psi(x) \\
&= (-i\hbar)\, \phi^*(x)\psi(x) \,|_{-\infty}^{+\infty} - (-i\hbar) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) d\phi^*(x) \\
&= 0 + (+i\hbar) \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\phi(x)}{dx} \right)^* \psi(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-i\hbar \frac{d\phi(x)}{dx} \right)^* \psi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (p\phi(x))^* \psi(x) dx \\
&= \langle p\phi(x) \,| \psi(x) \rangle
\end{aligned}$$

olduğundan p işlemcisi hermitiktir.

6. Üniter(Birimsel) İşlemci

Hermitik eşleniği, tersine eşit olan işlemciye üniter işlemci denir ve U ile gösterilir. Bu durum

$$U^\dagger = U^{-1} \tag{5.44}$$

şeklinde yazılır. Bir ortonormal baz vektörleri kümesini, başka bir ortonormal baz vektörleri kümesine dönüştüren bir dönüşüm U ve n boyutlu kompleks vektör uzayında iki ortonormal baz

$$|u_i\rangle\,, i = 1, 2, ..., n, \qquad |v_i\rangle\,, i = 1, 2, ..., n$$

olsun. Eğer U dönüşümü $|u_i\rangle$ ortonormal bazı, $|v_i\rangle$ ortonormal baza dönüştürmüşse

$$U\,|u_i\rangle = |v_i\rangle\,, i = 1, 2, ..., n \tag{5.45a}$$

yazılabilir. Benzer olarak $|v_i\rangle$ ortonormal bazı, $|u_i\rangle$ ortonormal baza dönüştüren ters dönüşüm U^{-1} olur ve ters dönüşüm için

$$U^{-1}\,|v_i\rangle = |u_i\rangle\,, i = 1, 2, ..., n \tag{5.45b}$$

yazmak mümkündür. (5.25) eşitliğine göre $|x\rangle$ ve $|y\rangle$ vektörleri $|u_i\rangle$ bazında

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \,|u_i\rangle$$

$$|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i |u_i\rangle$$

olarak yazılabilir. Bu vektörlerin iç çarpımı

$$\langle x \ |y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \underbrace{\langle u_i \ |u_i\rangle}_{=1} = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \tag{5.46}$$

olur. U dönüşümü altında $|x\rangle$ ve $|y\rangle$vektörleri sırasıyla $|x'\rangle$ ve $|y'\rangle$ vektörlerine dönüşmüş olsunlar. $|x'\rangle$ ve $|y'\rangle$ vektörleri $|v_i\rangle$ bazında

$$\begin{aligned} |x'\rangle &= U|x\rangle = U\sum_{i=1}^{n} x_i |u_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i (U|u_i\rangle) = \sum_{i=1}^{n} x_i |v_i\rangle \\ |y'\rangle &= U|y\rangle = U\sum_{i=1}^{n} y_i |u_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i (U|u_i\rangle) = \sum_{i=1}^{n} y_i |v_i\rangle \end{aligned}$$

olurlar. Bu yeni bazda, bu iki vektörün iç çarpımına bakalım.

$$\langle Ux \ |Uy\rangle = \langle x' \ |y'\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \underbrace{\langle v_i \ |v_i\rangle}_{=1} = \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \tag{5.47}$$

bulunur. Görüldüğü gibi $|u_i\rangle$ bazındaki iç çarpım, $|v_i\rangle$ bazındaki iç çarpıma eşittir:$\langle x \ |y\rangle = \langle x' \ |y'\rangle$. Diğer bir ifadeyle U dönüşümü altında iki vektörün iç çarpımı değişmez. Şimdi $|x\rangle$ ve $|x'\rangle$ vektörlerinin normuna bakalım:

$$\begin{aligned} |x|^2 &= \langle x \ |x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^* x_i \underbrace{\langle u_i \ |u_i\rangle}_{=1} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Rightarrow |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \\ |x'|^2 &= \langle x' \ |x'\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^* x_i \underbrace{\langle v_i \ |v_i\rangle}_{=1} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Rightarrow |x'| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \end{aligned}$$

U dönüşümü keyfi bir $|x\rangle$ vektörünü $|x'\rangle$ vektörüne dönüştürürken normunu korumuştur. Bu nedenle U dönüşümünün birimsel olduğunu söylenir. Bu kez $(|x'\rangle)^\dagger |x'\rangle = (|Ux\rangle)^\dagger |Ux\rangle$ çarpımına bakalım. $(|Ux\rangle)^\dagger = \langle \ x \,|\, U^\dagger$ olduğundan

$$(|x'\rangle)^\dagger |x'\rangle = (|Ux\rangle)^\dagger |Ux\rangle = \left\langle x \ \middle| U^\dagger U \middle| \ x \right\rangle \tag{5.48}$$

yazılabilir. (5.48)'in sol tarafı için işlem yapılırsa

$$\begin{aligned} (|x'\rangle)^\dagger |x'\rangle &= (|Ux\rangle)^\dagger |Ux\rangle = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i |v_i\rangle\right)^\dagger \left(\sum_{i=1}^{n} x_i |v_i\rangle\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \langle v_i|\right) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i |v_i\rangle\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^* x_i = \langle x \ |x\rangle \end{aligned} \tag{5.49}$$

elde edilir. (5.48) ve (5.49)'un sol tarafları eşit olduğundan sağ tarafları da eşit olmalıdır. Bu göre

$$\left\langle x \left| U^{\dagger} U \right| x \right\rangle = \langle x \,| x \rangle \tag{5.50}$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitliğin sağlanması

$$U^{\dagger} U = I \tag{5.51}$$

olmasıyla mümkündür. Diğer yandan tersi varsa, bir U işlemcisi için

$$U^{-1} U = I \tag{5.52}$$

yazılabileceğini biliyoruz. (5.51) ve (5.52) birlikte değerlendirildiğinde (5.44) ile verilen üniter olma şartı $U^{\dagger} = U^{-1}$ elde edilmiş olur.

Üniter bir dönüşümün reel vektör uzayındaki karşılığı ortogonal dönüşümdür. Diğer bir ifade ile üniter bir işlemcinin reel vektör uzayındaki karşılığı ortogonal bir işlemcidir. Ortogonal işlemci R ile gösterilir. Tersi, transpozuna eşit olan işlemciye ortogonal denir.

$$R^T = R^{-1} \tag{5.53}$$

İşlemcilerin bu özellikleri, matris temsillerinde daha kolay anlaşılacaktır.

İşlemcilerin Matris Temsili

Bir A işlemcisinin $|u_j\rangle$ baz vektörüne etkisinden sonra $|u_i\rangle$ ile iç çarpımı yapılırsa, A_{ij} matris elemanı elde edilir.

$$A_{ij} = \langle u_i \,| A u_j \rangle = \langle u_i \,| A |\, u_j \rangle \tag{5.54}$$

n boyutlu vektör uzayında $i, j = 1, 2, ..., n$ değerlerini alır. A_{ij} elemanları $n \times n$ boyutlu bir matrisi oluşturacak şekilde i. satır j. sütuna yazılırsa, A işlemcisinin matris temsili elde edilmiş olur:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{5.55}$$

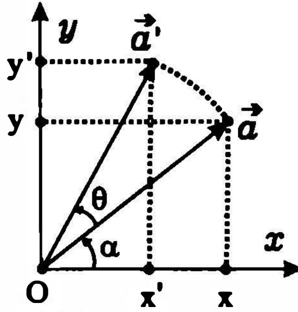
A işlemcisi bir $|x\rangle$ vektörüne etki etmiş ve onu $|x'\rangle$ vektörüne dönüştürmüşse $|x'\rangle = A\,|x\rangle$ yazılabilir. Bu işlem, matris temsilinde

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{5.56}$$

şeklinde yazılır.

Örnek 5.10 İki boyutlu Öklid uzayında bir $|a\rangle$ vektörünü saat ibresi tersine θ kadar döndüren işlemci $R(\theta)$'nın matris temsilini bulun.

Çözüm 5.10



Şekil 5.3 Düzlemde bir vektörün dönmesi

Şekil 5.3'teki gibi xy düzleminde verilen $|a\rangle = (x, y)$ vektörü pozitif θ kadar döndürülmüş olsun. Yeni vektöre $|a'\rangle = (x', y')$ diyelim. Vektörlerin bileşenleri arasında bir eşitlik bulmak istiyoruz. Eğer bulabilirsek matris elemanlarını, dolayısıyla dönme matrisini bulmuş olacağız. $|a\rangle$ vektörünün boyu $|a| = a$ olmak üzere dik bileşenleri

$$\begin{aligned} x &= aCos\alpha \\ y &= aSin\alpha \end{aligned}$$

olur. Dönme esnasında $|a\rangle$ vektörünün boyu değişmediğinden $|a'| = |a| = a$ olur. Buna göre $|a'\rangle$ vektörünün dik bileşenleri

$$\begin{aligned} x' &= aCos\,(\alpha + \theta) = a\,(Cos\alpha Cos\theta - Sin\alpha Sin\theta) \\ y' &= aSin\,(\alpha + \theta) = a\,(Sin\alpha Cos\theta + Cos\alpha Sin\theta) \end{aligned}$$

bulunur. $x = aCos\alpha$, $y = aSin\alpha$ eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} x' &= xCos\theta - ySin\theta \\ y' &= xSin\theta + yCos\theta \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikler (5.56) ile verilen matris biçiminde yazılırsa

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cos\theta & -Sin\theta \\ Sin\theta & Cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

olur. Buna göre bir $|a\rangle$ vektörünü saat ibresi tersine θ kadar döndüren işlemcinin matris temsili

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} Cos\theta & -Sin\theta \\ Sin\theta & Cos\theta \end{pmatrix} \qquad (5.57)$$

olarak bulunur.

Bu sonuç, üç boyutlu Öklid uzayında bir vektörü z ekseni etrafında pozitif θ kadar döndüren işlemcinin matris temsiline

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} Cos\theta & -Sin\theta & 0 \\ Sin\theta & Cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.58}$$

şeklinde genişletilebilir. Çünkü z ekseni etrafındaki dönmede vektörün z bileşeni sabit kalır.

Örnek 5.11 $R(\theta)$ işlemcisinin ortogonal olduğunu gösterin.

Çözüm 5.11 Eğer $R^{-1} = R^T$ şartı sağlanıyorsa R ortogonaldir. Önce ters matrisi bulalım. $detR = Cos^2\theta + Sin^2\theta = 1$ olduğundan R'nin tersi vardır. Ters matrisin elemanları

$$R^{-1}_{11} = \frac{(-1)^{1+1}}{1} M_{11} = (+1) \begin{vmatrix} Cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = Cos\theta$$

$$R^{-1}_{12} = \frac{(-1)^{1+2}}{1} M_{21} = (-1) \begin{vmatrix} -Sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = Sin\theta$$

$$R^{-1}_{13} = \frac{(-1)^{1+3}}{1} M_{31} = (+1) \begin{vmatrix} -Sin\theta & 0 \\ Cos\theta & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$R^{-1}_{21} = \frac{(-1)^{2+1}}{1} M_{12} = (-1) \begin{vmatrix} Sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -Sin\theta$$

$$R^{-1}_{22} = \frac{(-1)^{2+2}}{1} M_{22} = (+1) \begin{vmatrix} Cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = Cos\theta$$

$$R^{-1}_{23} = \frac{(-1)^{2+3}}{1} M_{32} = (-1) \begin{vmatrix} Cos\theta & 0 \\ Sin\theta & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$R^{-1}_{31} = \frac{(-1)^{3+1}}{1} M_{13} = (+1) \begin{vmatrix} Sin\theta & Cos\theta \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$R^{-1}_{32} = \frac{(-1)^{3+2}}{1} M_{23} = (-1) \begin{vmatrix} Cos\theta & -Sin\theta \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$R^{-1}_{33} = \frac{(-1)^{3+3}}{1} M_{33} = (+1) \begin{vmatrix} Cos\theta & -Sin\theta \\ Sin\theta & Cos\theta \end{vmatrix} = 1$$ bulunur. Böylece ters matris

$$R^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} Cos\theta & Sin\theta & 0 \\ -Sin\theta & Cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bulunur. Öte yandan R matrisinin transpozu

$$R^T(\theta) = \begin{pmatrix} Cos\theta & Sin\theta & 0 \\ -Sin\theta & Cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olur. $R^{-1} = R^T$ olduğundan $R(\theta)$ işlemcisi ortogonaldır.

Örnek 5.12 2 boyutlu Öklid uzayında (x, y) düzleminde bulunan bir $|b\rangle$ vektörünün x eksenine göre ayna simetrisi alan M işlemcinin matris temsilini bulunuz.

Çözüm 5.12 M işlemcisi $|b\rangle = x\,|e_1\rangle + y\,|e_2\rangle$ vektörünü $|b'\rangle = x\,|e_1\rangle - y\,|e_2\rangle$ vektörüne dönüştürmektedir. Buna göre M işlemcisinin baz vektörlerine etkisi

$$\begin{aligned} M\,|e_1\rangle &= |e_1\rangle \\ M\,|e_2\rangle &= -\,|e_2\rangle \end{aligned}$$

biçimindedir. (5.54) kullanılarak M matrisinin elemanları

$$\left.\begin{aligned} M_{11} &= \langle e_1|\,M\,|e_1\rangle = \langle e_1|\,e_1\rangle = 1 \\ M_{12} &= \langle e_1|\,M\,|e_2\rangle = -\,\langle e_1|\,e_2\rangle = 0 \\ M_{21} &= \langle e_2|\,M\,|e_1\rangle = \langle e_2|\,e_1\rangle = 0 \\ M_{22} &= \langle e_2|\,M\,|e_2\rangle = -\,\langle e_2|\,e_2\rangle = -1 \end{aligned}\right\} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

olur. Burada $\langle e_i|\,e_j\rangle = \delta_{ij}$ şartı kullanıldı.

Örnek 5.13 Üç boyutlu Öklid uzayında bir $|a\rangle$ vektörünü, xy düzlemine dik izdüşüren A işlemcinin matris temsilini bulunuz.

Çözüm 5.13 $|a\rangle$ vektörü dik bileşenleri cinsinden

$$|a\rangle = x\,|e_1\rangle + y\,|e_2\rangle + z\,|e_3\rangle$$

biçimindedir. $|a\rangle$ vektörünün xy düzlemindeki dik izdüşüm vektörüne $|a'\rangle$ diyelim. Bu vektörünün z bileşeni 0'dır. Bu nedenle $|a'\rangle$ vektörü dik bileşenleri cinsinden

$$|a'\rangle = x\,|e_1\rangle + y\,|e_2\rangle + 0\,|e_3\rangle$$

olur. A işlemcisinin baz vektörlerine etkisi şöyledir:

$$\begin{aligned} A\,|e_1\rangle &= |e_1\rangle \\ A\,|e_2\rangle &= |e_2\rangle \\ A\,|e_3\rangle &= 0 \end{aligned}$$

$A_{ij} = \langle e_i\ |A|\,e_j\rangle$matris elemanları hesaplanırsa, A işlemcisi için

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur.

Örnek 5.14 3 boyutlu kompleks vektör uzayında bir H işlemcisinin bir $|x\rangle = (x_1, x_2, x_3)$ vektörüne etkisi

$$H\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - i\,x_2 + x_3 \\ i\,x_1 + i\,x_3 \\ x_1 - i\,x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

olarak veriliyor. **a)** H işlemcisinin matris temsilini bulunuz. **b)** H işlemcisinin hermitik olduğunu gösteriniz.

Çözüm 5.14 a) $|x'\rangle = H\,|x\rangle$ eşitliği yardımı ile $|x'\rangle$ sütun matrisini, biri H diğeri $|x'\rangle$ için olan iki matrisin çarpımı olarak

$$\begin{pmatrix} x_1 - i\,x_2 + x_3 \\ i\,x_1 + i\,x_3 \\ x_1 - ix_2 + \ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \\ i & 0 & i \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Buradan H işlemcisinin matris temsili

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \\ i & 0 & i \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur.

b) $H^\dagger$ için işlem yapılırsa

$$H^\dagger = \left(H^T\right)^* = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 0 & -i \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \\ i & 0 & i \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix}$$

bulunur. $H^\dagger = H$ olduğundan hermitiktir.

Örnek 5.15 Küresel koordinatlardaki birim vektörleri, kartezyen koordinat birim vektörlerine bağlayan dönüşüm ile tersini yapan dönüşümün matris temsillerini bulunuz.

Çözüm 5.15 Bölüm 3'te küresel koordinatlarda $\mathbf{e}_r$,$\mathbf{e}_\theta$ ve $\mathbf{e}_\phi$ birim vektörleri **i**, **j**, **k** birim vektörleri cinsinden

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= Sin\theta\ Cos\phi\ \mathbf{i} + Sin\theta\ Sin\phi\ \mathbf{j} + Cos\theta\ \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_\theta &= Cos\theta Cos\phi\ \mathbf{i} + Cos\theta Sin\phi\ \mathbf{j} - Sin\theta\ \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_\phi &= -Sin\phi\ \mathbf{i} + Cos\phi\ \mathbf{j} \end{aligned}$$

olarak bulunmuştu. Bu dönüşümü matris çarpımı yardımı ile kolayca

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Sin\theta\ Cos\phi & Sin\theta\ Sin\phi & Cos\theta \\ Cos\theta Cos\phi & Cos\theta Sin\phi & -Sin\theta \\ -Sin\phi & Cos\phi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. Dönüşüm matrisine R diyelim. R için

$$R = \begin{pmatrix} Sin\theta\ Cos\phi & Sin\theta\ Sin\phi & Cos\theta \\ Cos\theta Cos\phi & Cos\theta Sin\phi & -Sin\theta \\ -Sin\phi & Cos\phi & 0 \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Baz vektörlerini dönüştüren bu dönüşümün ortogonal olduğu yani; $RR^{-1} = R^{-1}R = I$ olduğu gösterilebilir. Ortogonal bir işlemcinin tersi, transpozuna eşit olduğundan

$$R^{-1} = R^T = \begin{pmatrix} Sin\theta\ Cos\phi & Cos\theta Cos\phi & -Sin\phi \\ Sin\theta\ Sin\phi & Cos\theta Sin\phi & Cos\phi \\ Cos\theta & -Sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. **i**, **j**, **k** birim vektörlerini $\mathbf{e}_r$,$\mathbf{e}_\theta$,$\mathbf{e}_\phi$ birim vektörlerine dönüştüren dönüşüm

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\phi \end{pmatrix}$$

olur.

Örnek 5.16 3 boyutlu kompleks vektör uzayında bir A işlemcisinin $|x\rangle$ vektörüne etkisi

$$A\,|x\rangle = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - ix_2 + x_3 \\ ix_1 - x_3 \\ x_1 {}_- x_2 + ix_3 \end{pmatrix}$$

olarak veriliyor. Bu uzayda iki vektör $|x\rangle = (x_1, x_2, x_3)$ ve $|y\rangle = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere $\langle y|\, A\,|x\rangle^* = \langle x|\, A^\dagger\,|y\rangle$ tanımını kullanarak A işlemcisinin hermitik eşleniğini bulunuz. $A^\dagger =?$

Çözüm 5.16 $A\,|x\rangle$çarpımından

$$A\,|x\rangle = \begin{pmatrix} x_1 - ix_2 + x_3 \\ ix_1 - x_3 \\ x_1 {}_- x_2 + ix_3 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \\ i & 0 & -1 \\ 1 & -1 & i \end{pmatrix}$$

olduğu açıktır. Bra-ket temsilinde $\langle y|\, A\,|x\rangle^*$ işlemi yapılırsa

$$\begin{aligned} \langle y|\, A\,|x\rangle^* &= \left[\begin{pmatrix} y_1^* & y_2^* & y_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - ix_2 + x_3 \\ ix_1 - x_3 \\ x_1 - x_2 + ix_3 \end{pmatrix} \right]^* \\ &= [y_1^* (x_1 - ix_2 + x_3) + y_2^* (i\, x_1 - x_3) + y_3^* (x_1 - x_2 + ix_3)]^* \\ &= [y_1 (x_1^* + ix_2^* + x_3^*) + y_2 (-i\, x_1^* - x_3^*) + y_3 (x_1^* - x_2^* - ix_3^*)] \\ &= x_1^* (y_1 - iy_2 + y_3) + x_2^* (i\, y_1 - y_3) + x_3^* (y_1 - y_2 - i\, y_3) \end{aligned}$$

bulunur. Burada $(y_i^*)^* = y_i$ olduğuna ve kompleks eşlenik alındığında $i \rightarrow -i$ değişikliğinin yapıldığına dikkat edilmelidir. Son satırdaki ifade matris çarpımı biçiminde düzenlenirse

$$\langle y| A |x\rangle^* = \begin{pmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - iy_2 + y_3 \\ i\, y_1 - y_3 \\ y_1 - y_2 - i\, y_3 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Tanıma göre eşitliğin sağ tarafı $\langle x| A^\dagger |y\rangle$ işlemine eşittir.

$$\begin{pmatrix} x_1^* & x_2^* & x_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - iy_2 + y_3 \\ i\, y_1 - y_3 \\ y_1 - y_2 - i\, y_3 \end{pmatrix} = \langle x| A^\dagger |y\rangle$$

Buradan $A^\dagger |y\rangle$, dolayısyla $A^\dagger$ çözülürse

$$A^\dagger |y\rangle = \begin{pmatrix} y_1 - iy_2 + y_3 \\ i\, y_1 - y_3 \\ y_1 - y_2 - i\, y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \\ i & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -i \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Hermitik eşlenik bulma işlemi $\left(A^T\right)^*$ işleminden kolayca bulunabilirdi. Ancak, burada amaç $\langle y| A |x\rangle^* = \langle x| A^\dagger |y\rangle$ tanımını kullanmaktı. $A^\dagger \neq A$ olduğundan, A işlemcisi hermitik değildir.

Örnek 5.17 Bir A işlemcisinin $|b\rangle$ vektörüne etkisi

$$A |b\rangle = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ -x - z \\ 2x - y + z \end{pmatrix} = |c\rangle$$

şeklinde veriliyor. **a)** A dönüşüm matrisini standart $|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $|e_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bazında elde edin. **b)** A dönüşüm matrisini $|u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $|u_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ortonormal bazda elde edin.

Çözüm 5.17a) A dönüşüm matrisinin a_{ij} matris elemanları bulunursa

A bulunmuş olur. $|e_1\rangle$,$|e_2\rangle$ ve $|e_3\rangle$ bazında $|b\rangle$ vektörü

$$\begin{aligned}|b\rangle &= x\,|e_1\rangle + y\,|e_2\rangle + z\,|e_3\rangle = x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

olur. $|c\rangle$ vektörü $A\,|b\rangle$ çarpımı olarak yazılırsa

$$A\,|b\rangle = A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-y+2z\\-x-z\\2x-y+z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&0&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece A dönüşüm matrisi

$$A = \begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&0&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}$$

bulunur.

b) *Birinci Yol:* $|b\rangle$ vektörü $|u_1\rangle$,$|u_2\rangle$ ve $|u_3\rangle$ bazında yazılırsa

$$\begin{aligned}|b\rangle &= x\,|u_1\rangle + y\,|u_2\rangle + z\,|u_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}x+y\\x+z\\y+z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu kez $|c\rangle$ vektörü $|u_1\rangle$,$|u_2\rangle$ ve $|u_3\rangle$ bazında yazılırsa

$$\begin{aligned}|c\rangle = \begin{pmatrix}x-y+2z\\-x-z\\2x-y+z\end{pmatrix} &= (x-y+2z)\,|u_1\rangle + (-x-z)\,|u_2\rangle\\ &\quad + (2x-y+z)\,|u_3\rangle\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}x-y+2z\\x-y+2z\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-x-z\\0\\-x-z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2x-y+z\\2x-y+z\end{pmatrix}\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-y+z\\3x-2y+3z\\x-y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

bulunur. Yeni bazda $A\,|b\rangle = |c\rangle$ eşitliği, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sadeleştirilerek yazılırsa

$$A\begin{pmatrix} x+y \\ x+z \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+z \\ 3x-2y+3z \\ x-y \end{pmatrix}$$

olur. A matrisi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

şeklinde olsun. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+y \\ x+z \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+z \\ 3x-2y+3z \\ x-y \end{pmatrix}$$

eşitliği yazılabilir. Matris çarpımı yapılır ve düzenlenirse

$$\begin{pmatrix} a_{11}(x+y)+a_{12}(x+z)+a_{13}(y+z) \\ a_{21}(x+y)+a_{22}(x+z)+a_{23}(y+z) \\ a_{31}(x+y)+a_{32}(x+z)+a_{33}(y+z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+z \\ 3x-2y+3z \\ x-y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (a_{11}+a_{12})x+(a_{11}+a_{13})y+(a_{12}+a_{13})z \\ (a_{21}+a_{22})x+(a_{21}+a_{23})y+(a_{22}+a_{23})z \\ (a_{31}+a_{32})x+(a_{31}+a_{33})y+(a_{32}+a_{33})z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+z \\ 3x-2y+3z \\ x-y \end{pmatrix}$$

bulunur. Sol taraftaki matris ile sağ taraftaki matrisin eşit olması, aynı adresli satırların eşit olmasıyla mümkündür:

$$\begin{aligned} a_{11}+a_{12} &= 0,\ a_{11}+a_{13}=-1,\ a_{12}+a_{13}=1 \\ a_{21}+a_{22} &= 3,\ a_{21}+a_{23}=-2,\ a_{22}+a_{23}=3 \\ a_{31}+a_{32} &= 1,\ a_{31}+a_{33}=-1,\ a_{32}+a_{33}=0 \end{aligned}$$

Bu denklemler çözülürse $a_{11}=-1$, $a_{12}=1$, $a_{13}=0$, $a_{21}=-1$, $a_{22}=4$, $a_{23}=-1$, $a_{31}=0$, $a_{32}=1$, $a_{33}=-1$ olur. Bu elemanlar yerine yazılırsa

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

bulunur.

İkinci Yol: $A\,|b\rangle = |c\rangle$ denkleminde $|b\rangle$ yerine sırasıyla $|u_1\rangle$,$|u_2\rangle$ ve $|u_3\rangle$ baz vektörleri yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa, A işlemcisinin baz vektörlerine etkisi

$$A\,|u_1\rangle = A\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1-1+2\times 0 \\ -1-0 \\ 2\times 1-1+0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A|u_2\rangle = A\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1-0+2\times1\\-1-1\\2\times1-0+1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix}$$

$$A|u_3\rangle = A\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0-1+2\times1\\-0-1\\2\times0-1+1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

bulunur. Elde edilen bu vektörler $|u_1\rangle, |u_2\rangle$, $|u_3\rangle$ bazında yazılırsa, $A|u_1\rangle$ için

$$A|u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \alpha_1|u_1\rangle + \alpha_2|u_2\rangle + \alpha_3|u_3\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha_2\\0\\\alpha_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\\alpha_3\\\alpha_3\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\\alpha_1+\alpha_3\\\alpha_2+\alpha_3\end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağlanması için

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2&=0\\\alpha_2+\alpha_3&=-1\\\alpha_1+\alpha_3&=1\end{aligned}\right\}\alpha_1=-1,\ \alpha_2=1,\ \alpha_3=0$$

olmalıdır. Buna göre

$$A|u_1\rangle = (-1)|u_1\rangle + (1)|u_2\rangle + (0)|u_3\rangle$$

olarak yazılabilir. Buradaki $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 0$ çarpanları dönüşüm matrisinin birinci satır elemanlarıdır. $A|u_2\rangle$ ve $A|u_3\rangle$ için benzer işlemler yapılırsa

$$A|u_2\rangle = (-1)|u_1\rangle + (4)|u_2\rangle + (-1)|u_3\rangle$$

$$A|u_3\rangle = (0)|u_1\rangle + (1)|u_2\rangle + (-1)|u_3\rangle$$

bulunur. Burada ( ) içindeki katsayılar A dönüşüm matrisinin sırasıyla, ikinci ve üçüncü satır elemanlarıdır. Böylece A için

$$A = \begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&4&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

bulunur.■

5.6 Benzerlik Dönüşümleri, Bir İşlemcinin Özdeğer ve Özvektörleri

Bu kesimde, lineer bir dönüşüm olan benzerlik dönüşümünü ele alacağız. Bir S işlemcisi $|a\rangle$ vektörüne etki edip onu $|a'\rangle$ vektörüne dönüştürsün. Bu iki vektör aynı $|u_j\rangle$ bazında

$$\begin{aligned} |a'\rangle &= S\,|a\rangle \\ \sum_{j=1}^{n} a'_j\,|u_j\rangle &= \sum_{j=1}^{n} a_j S\,|u_j\rangle \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifadenin her iki tarafı $|u_i\rangle$ ile skaler çarpılır ve gerekli işlemler yapılırsa, $|a'\rangle$ vektörünün bileşenleri $|a\rangle$ vektörünün bileşenleri cinsinden

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a'_j \underbrace{\langle u_i|\, u_j\rangle}_{\delta_{ij}} &= \sum_{j=1}^{n} a_j \underbrace{\langle u_i\, |S|\, u_j\rangle}_{S_{ij}} \\ a'_i &= \sum_{j=1}^{n} S_{ij} a_j \end{aligned} \qquad (5.59)$$

olarak bulunur. Burada S_{ij}, dönüşüm matrisinin i. satır j. sütun elemanıdır. Şimdi $|a\rangle$ vektörü $|u_j\rangle$ ve $|a'\rangle$ vektörü $\left|u'_j\right\rangle$ bazında yazılmış olsun. Acaba baz vektörleri arasında bir dönüşüm bulabilir miyiz? Baz vektörlerini değiştirmek, koordinat sistemini değiştirmekle eşdeğerdir. Böyle bir dönüşümde vektöre dokunulmaz. Bu nedenle bir vektör hangi bazda yazılırsa yazılsın yine aynı vektördür. Bu durumda

$$|a\rangle = |a'\rangle$$

olur. $|a\rangle$ vektörü $|u_k\rangle$ bazında, $|a'\rangle$ vektörü $|u'_i\rangle$ bazında yazılırsa

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\,|u_k\rangle = \sum_{i=1}^{n} a'_i\,|u'_i\rangle$$

bulunur. a'_i için (5.59)'da verilen ifade yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k\,|u_k\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} S_{ij} a_j \right) |u'_i\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{i=1}^{n} S_{ij}\,|u'_i\rangle \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafı $\sum_{j=1}^{n} a_j |u_j\rangle$ yapısındadır. Buradan

$$|u_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} S_{ij} |u_i'\rangle \Rightarrow |u\rangle = S|u'\rangle$$

yazılabilir. Bu eşitliğin iki tarafı S^{-1} ile soldan çarpılırsa

$$S^{-1}|u\rangle = \underbrace{S^{-1}S}_{I}|u'\rangle \Rightarrow |u'\rangle = S^{-1}|u\rangle \tag{5.60}$$

bulunur. Buna göre; eğer S işlemcisi $|a\rangle$ vektörünü $|a'\rangle$ vektörüne dönüştürüyorsa, S^{-1} baz vektörlerini dönüştürecektir.

Şimdi soru şudur: Bir $|a\rangle$ vektörünü $|b\rangle$ vektörüne dönüştüren bir A işlemcisini ele alalım. S dönüşümü $|a\rangle$ vektörünü $|a'\rangle$ vektörüne ve $|b\rangle$ vektörünü $|b'\rangle$ vektörüne dönüştürüyorsa, acaba A işlemcisi bir A' işlemcisine nasıl dönüşür. Diğer bir ifade ile S dönüşümü altında A işlemcisinin dönüşümü nasıldır? Yukarıda söylenenler

$$\begin{aligned}
|a'\rangle &= S|a\rangle \Rightarrow |a\rangle = S^{-1}|a'\rangle \\
|b'\rangle &= S|b\rangle \Rightarrow |b\rangle = S^{-1}|b'\rangle \\
|b\rangle &= A|a\rangle, \ |b'\rangle = A'|a'\rangle \\
& A \overset{?}{\Rightarrow} A'
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $|b\rangle = A|a\rangle$ ifadesinde $|b\rangle = S^{-1}|b'\rangle$ ve $|a\rangle = S^{-1}|a'\rangle$ yerine yazılırsa

$$|b\rangle = A|a\rangle \Rightarrow S^{-1}|b'\rangle = AS^{-1}|a'\rangle$$

olur. Bu ifadenin her iki tarafı soldan S ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\underbrace{SS^{-1}}_{I}|b'\rangle &= SAS^{-1}|a'\rangle \\
|b'\rangle &= SAS^{-1}|a'\rangle
\end{aligned}$$

olur. Bu $|b'\rangle = A'|a'\rangle$ yapısında olduğundan, A' için

$$A' = SAS^{-1} \tag{5.61}$$

bulunur. Bu işlem A üzerinde bir benzerlik dönüşümü olarak isimlendirilir ve A', A'ya benzerdir denir. Çünkü işlemciler bu dönüşüm altında benzerliklerini korurlar. Benzerlik dönüşümü altında bir matrisin izi ve determinantı değişmez:

$$\begin{aligned}
detA' &= det\left(SAS^{-1}\right) = det(S)\,det(A)\,det\left(S^{-1}\right) \\
&= det(S)\,det(A)\frac{1}{det(S)} = detA
\end{aligned}$$

$$TrA' = Tr\left(SAS^{-1}\right) = Tr\left(AS^{-1}S\right) = TrA.$$

Ortogonal R ve birimsel U işlemcilerine karşılık gelen dönüşümler için ters matrisler sırasıyla $R^{-1} = R^T$ ve $U^{-1} = U^\dagger$ olduğundan $SAS^{-1} = RAR^{-1} = UAU^{-1}$ çarpımlarını hesaplamak nispeten basitleşir. Bu işlem sonunda A matrisi köşegen hale dönüşür.

Örnek 5.18 A ve U dönüşüm matrisleri

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3-i \\ 3+i & -1 \end{pmatrix}, U = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 2 & -3+i \\ 3+i & 2 \end{pmatrix}$$

olarak veriliyor. $A' = UAU^{-1}$ işlemini yaparak A''nü bulun.

Çözüm 5.18 U dönüşümünün hermitik eşleniği
$U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 2 & 3-i \\ -3-i & 2 \end{pmatrix}$ olur. $U^\dagger U$ çarpımı yapılırsa

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 2 & 3-i \\ -3-i & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3+i \\ 3+i & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla U birimseldir ve tersi $U^{-1} = U^\dagger$ olarak alınırsa, AU^{-1} için

$$\begin{aligned} AU^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 2 & 3-i \\ 3+i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3-i \\ -3-i & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} -6 & 12-4i \\ 9+3i & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ve UAU^{-1} için

$$\begin{aligned} A' &= UAU^{-1} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 2 & -3+i \\ 3+i & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} -6 & 12-4i \\ 9+3i & 8 \end{pmatrix} \\ A' &= \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -42 & 0 \\ 0 & 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 5.19 İki boyutlu bir uzayda ortonormal $|u_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|u_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ baz vektörleri bir dönüşümle $|u_1'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$, $|u_2'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ şeklindeki baz vektörlerine dönüşmüştür. Baz vektörlerini dönüştüren U^{-1} matrisi bulup ondan da U dönüşümünü elde edin.

Çözüm 5.19 Yeni baz vektörleri, eski baz vektörleri cinsinden yazılırsa

$$|u_1'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-i}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle$$

$$|u_2'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle$$

bulunur. Baz vektörlerini dönüştüren matris U^{-1} olacağından, $|u'\rangle = U^{-1}|u\rangle$ matris çarpımı biçiminde yazılırsa

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

bulunur. Buradan

$$U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Baz vektörlerini dönüştüren matris üniter olduğundan $U^\dagger = U^{-1}$ eşitliği vardır. İki tarafın hermitik eşleniği alınır ve $(U^\dagger)^\dagger = U$ olduğu hatırlanırsa

$$U = \left[(U^{-1})^T\right]^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.■

Özdeğer Denklemi

Artık bir işlemcinin özdeğer denklemine geçebiliriz. Genel olarak bir işlemci bir vektörü başka bir vektöre dönüştürüyordu. Özel olarak, bir A işlemcisinin sıfırdan farklı bir $|x\rangle$ vektörüne etkisi sonucu

$$A|x\rangle = \lambda|x\rangle \tag{5.62}$$

şeklinde oluşan denkleme özdeğer denklemi denir. Burada λ özdeğer, $|x\rangle$ özvektör olarak isimlendirilir. Özdeğer denkleminde bir işlemci bir vektöre etki etmekte ve sonuçta vektör bir skalerle çarpılmış olarak ortaya çıkmaktadır. Bu λ skalerleri reel veya kompleks olabilir. Bir matrisin λ özdeğerlerini ve $|x\rangle$ özvektörlerini bulma problemine özdeğer problemi denir. Fizikte, özdeğer denkleminin pek çok uygulaması mevcuttur. Bir kaçını burada verelim:

1. Birim işlemcisi için özdeğer denklemi;

$$I|x\rangle = \lambda|x\rangle, \quad \lambda = 1$$

2. Parite işlemcisi için özdeğer denklemi;

$$P^2|\psi(\mathbf{r})\rangle = \lambda^2|\psi(\mathbf{r})\rangle, \quad \lambda = \mp 1$$

3. Lineer momentum işlemcisi için özdeğer denklemi;

$$-i\hbar\frac{\partial}{dx}\left|\psi(x)\right\rangle = \lambda\left|\psi(x)\right\rangle, \quad \lambda = \mp\hbar k$$

4. Açısal momentum işlemcileri için özdeğer denklemi;

$$\begin{aligned} L^2\left|Y_\ell^m\right\rangle &= \lambda^2\left|Y_\ell^m\right\rangle, \ \lambda = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar \\ L_z\left|Y_\ell^m\right\rangle &= \lambda\left|Y_\ell^m\right\rangle, \ \lambda = m\hbar \end{aligned}$$

5. Hamilton işlemcisi için özdeğer denklemi;

$$H\left|\psi_{n\ell m}(\mathbf{r})\right\rangle = E\left|\psi_{n\ell m}(\mathbf{r})\right\rangle$$

Her lineer işlemci bir matrisle temsil edilebildiğinden, bundan sonra özdeğer denklemine matris gösterimi üzerinden devam edeceğiz.

Bir Matrisin Özdeğer Denklemi

A bir işlemciye karşılık gelen, $n \times n$ boyutlu bir matris, $|x\rangle$ bileşenleri x_i olan $|x\rangle = (x_1 \ x_2 \ ... \ x_n)^T$ biçiminde bir sütun matrisi olmak üzere, (5.62) ile verilen özdeğer denklemi

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(A_{ij} - \lambda\delta_{ij})\,x_j = 0 \tag{5.63}$$

biçiminde yazılabilir. Sonuç, n bilinmeyenli n tane lineer homojen denklemden oluşan bir denklem sistemidir:

$$\begin{aligned} i &= 1 \Rightarrow (A_{11} - \lambda)\,x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + ... + A_{1n}x_n = 0 \\ i &= 2 \Rightarrow A_{21}x_1 + (A_{22} - \lambda)\,x_2 + A_{23}x_3 + ... + A_{2n}x_n = 0 \\ i &= 3 \Rightarrow A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + (A_{33} - \lambda)\,x_3 + ... + A_{3n}x_n = 0 \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ i &= n \Rightarrow A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + A_{n3}x_3 + ... + (A_{nn} - \lambda)\,x_n = 0 \end{aligned} \tag{5.64}$$

Bu denklem sistemi matris biçiminde

$$(A - \lambda I)\left|x\right\rangle = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & ... & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda & ... & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & ... & A_{nn} - \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \tag{5.65}$$

şeklinde yazılabilir. Burada λ skaleri birim matris yardımıyla λI şeklinde yazıldı. $|x\rangle \neq 0$ olmak üzere bu denklemin sağlanması $det(A - \lambda I) = 0$

olmasıyla mümkündür. Bu, $(A - \lambda I)$ matrisinin satır veya sütunlarının lineer bağımlı olduğu anlamına gelir. $n \times n$ boyutlu $(A - \lambda I)$ matrisinin determinantı sıfıra eşitlenirse

$$c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0 \tag{5.66}$$

şeklindeki karakteristik denklem elde edilir. Bu denklemin en az 1, en çok n tane ayrık kökü vardır. Özdeğer probleminin birinci amacı bu λ özdeğerlerini bulmaktır. İkinci amaç ise λ_i özdeğerlerine karşılık gelen $\left|x^{(i)}\right\rangle$ özvektörlerini bulmaktır. Bunun için λ'nın her bir değeri (5.65)'te yerine yazılır ve elde edilen denklem sistemi çözülür. Böylece $\left|x^{(i)}\right\rangle$ vektörünün $x_j^{(i)}$, $j = 1, 2, .., n$ bileşenleri bulunur. $\left|x^{(i)}\right\rangle$ özvektörleri normalize edilirse, ortonormalize bir vektör kümesi elde edilir. Çakışık özdeğerlere karşılık gelen $\left|x^{(j)}\right\rangle$ özvektörleri

$$\left\langle x^{(i)} \middle| x^{(j)} \right\rangle = \delta_{ij}$$

ortonormalizasyon bağıntısı kullanılarak elde edilebilir.

Elde edilen ortonormal özvektörler sütun düzeninde yazılarak

$$S = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & & x_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \dots & x_n^{(n)} \end{pmatrix} \tag{5.67}$$

elde edilir. S ve S^{-1} matrisleri yardımı ile

$$A' = S^{-1}AS$$

işlemi yapılarak A matrisi

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{5.68}$$

biçimindeki köşegen A' matris haline getirilebilir. Burada (5.61)'de verilen $A' = SAS^{-1}$ ifadesinden farklı olarak, $A' = S^{-1}AS$ şeklinde olmasına dikkat edilmelidir. Bu geçiş $S \Leftrightarrow S^{-1}$ yazılarak yapılabilir.

Hermitik bir İşlemcinin Özdeğer Problemi

Kuantum mekaniğinde karşılaştığımız lineer momentum ve Hamilton işlemcisi gibi pek çok işlemci hermitiktir. Hermitik bir işlemcinin özdeğerleri özel bir öneme sahiptir. Çünkü, hermitik bir işlemcinin;

i. Özdeğerleri reeldir.
İspat: H hermitik işlemci için özdeğer denklemi

$$H\,|x\rangle = \lambda\,|x\rangle$$

şeklindedir. Bu eşitliğin iki tarafı $|x\rangle$ ile skaler çarpılır ve $H = H^\dagger$ hermitik olma özelliği kullanılırsa

$$\lambda\,\langle x|\, x\rangle = \langle x|\, H\, x\rangle = \left\langle H^\dagger x \middle|\, x\right\rangle = \langle Hx|\, x\rangle = \lambda^*\,\langle x|\, x\rangle$$

ele edilir. Bu eşitliğin sağlanması için $\lambda = \lambda^*$ olmalıdır. Kompleks eşleniği kendisine eşit olan sayı reeldir.
ii. Farklı özdeğerlere karşılık gelen özvektörler ortogonaldir.
İspat: H işlemcisinin λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen iki özvektör $\left|x^{(1)}\right\rangle$ ve $\left|x^{(2)}\right\rangle$ olsun. H işlemcinin bu vektörlere etkisi

$$\begin{aligned} H\left|x^{(1)}\right\rangle &= \lambda_1\left|x^{(1)}\right\rangle \\ H\left|x^{(2)}\right\rangle &= \lambda_2\left|x^{(2)}\right\rangle \Rightarrow \left\langle x^{(2)}\right| H^\dagger = \left\langle H^\dagger x^{(2)}\right| = \lambda_2^*\left\langle x^{(2)}\right| \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemlerin birincisini $\left|x^{(2)}\right\rangle$, ikincisini ise $\left|x^{(1)}\right\rangle$ ile skaler çarpıp taraf tarafa çıkarılırsa

$$\begin{aligned} \left\langle x^{(2)}\middle|\, H\, x^{(1)}\right\rangle - \left\langle H^\dagger x^{(2)}\middle|\, x^{(1)}\right\rangle &= (\lambda_1 - \lambda_2)\left\langle x^{(2)}\middle|\, x^{(1)}\right\rangle \\ \left\langle x^{(2)}\middle|\, H\, x^{(1)}\right\rangle - \left\langle x^{(2)}\middle|\, H\, x^{(1)}\right\rangle &= (\lambda_1 - \lambda_2)\left\langle x^{(2)}\middle|\, x^{(1)}\right\rangle \\ 0 &= (\lambda_1 - \lambda_2)\left\langle x^{(2)}\middle|\, x^{(1)}\right\rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\lambda_2^* = \lambda_2$ kullanıldı. $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ olduğundan bu eşitliğin sağlanması için $\left\langle x^{(2)}\middle|\, x^{(1)}\right\rangle = 0$ olmalıdır. Bu durum $\left|x^{(1)}\right\rangle$ ve $\left|x^{(2)}\right\rangle$'nin ortogonal olduğunu gösterir.
iii. Normalize özvektörlerden elde edilen $U(= S)$ matrisi birimseldir.
İspat: $\left\langle x^{(i)}\middle|\, x^{(j)}\right\rangle$ iç çarpımı açıkça yazılıra

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \left\langle x^{(i)}\middle|\, x^{(j)}\right\rangle = x_1^{*(i)}x_1^{(j)} + x_2^{*(i)}x_2^{(j)} + \ldots + x_n^{*(i)}x_n^{(j)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k^{*(i)}x_k^{(j)} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \end{aligned}$$

bulunur. $U^\dagger U$ çarpımı biçimsel olarak

$$U^\dagger U = \begin{pmatrix} x_1^{*(1)} & x_2^{*(1)} & & x_n^{*(1)} \\ x_1^{*(2)} & x_2^{*(2)} & \ldots & x_n^{*(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{*(n)} & x_2^{*(n)} & \ldots & x_n^{*(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \ldots & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \ldots & x_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \ldots & x_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

olur. Bu matris çarpımı iç çarpımlar cinsinden yazılırsa

$$U^{\dagger}U = \begin{pmatrix} \langle x^{(1)} | x^{(1)} \rangle & \langle x^{(1)} | x^{(2)} \rangle & \ldots & \langle x^{(1)} | x^{(n)} \rangle \\ \langle x^{(2)} | x^{(1)} \rangle & \langle x^{(2)} | x^{(2)} \rangle & \ldots & \langle x^{(2)} | x^{(n)} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x^{(n)} | x^{(1)} \rangle & \langle x^{(n)} | x^{(2)} \rangle & \ldots & \langle x^{(n)} | x^{(n)} \rangle \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = I$$

bulunur. $U^{\dagger}U = I$ olduğundan, U birimseldir. Birimsel bir matris için $U^{-1} = U^{\dagger}$ olduğu hatırlanırsa, A matrisini köşegenleştirmek için

$$A' = U^{\dagger}AU$$

işlemini yapmak gerekir. Reel simetrik bir matrisin normalize özvektörlerinden yukarıda anlatılan şekilde oluşturulan S matrisinin ortogonal olduğunu ve köşegenleştirme işleminin

$$A' = R^{T}AR$$

yardımı ile yapılabileceğini belirtelim. A ve B sıra değiştirebilen iki matris ise, yani $[A, B] = 0$ ise, A'nın özvektörlerinden oluşturulan S matrisi B matrisini de indirger. Bu indirgeme sonucunda B köşegen hale gelmeyebilir.

İzdüşüm İşlemcileri ile Özvektörler Arasındaki İlişki

Bir A matrisinin özdeğerleri λ_i ve ortonormalize özvektörleri $|x^{(i)}\rangle$ olmak üzere, izdüşüm işlemcilerinin matris temsili

$$P_i = |x^{(i)}\rangle \langle x^{(i)}| \tag{5.69}$$

dış çarpım yardımı ile verilir. Matris çarpımı verilirken buna direk yada tensör çarpımı denmişti. Tüm projeksiyonlar için

$$\sum P_i = 1 \tag{5.70}$$

eşitliği vardır. A matrisi P_i ve λ_i cinsinden

$$A = \sum \lambda_i P_i \tag{5.71}$$

olarak yazılabilir.

Örnek 5.20 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ matrisinin **a)** tüm özdeğer ve özvektörlerini bulun. **b)** Özvektörler yardımıyla A matrisini köşegenleştirin. **c)** $detA = detA'$ ve $TrA = TrA'$ olduğunu gösterin.

Çözüm 5.20 a) $det(A - \lambda I) = 0$ işlemi yapılırsa

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \\ &= (3-\lambda)(3-\lambda)^2 + 2[-2(3-\lambda)] \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5) \\ &= (3-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 5) = 0 \end{aligned}$$

özdeğerler $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 5$ olarak bulunur. Bu örnekte tüm özdeğerler ayrıktır. Kolaylık açısından $|x^{(i)}\rangle = (x, y, z)$ alınarak, özvektörleri bulalım: $\lambda_1 = 1$ için;

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{rr} 2x - 2y = 0 & (1) \\ -2x + 2y = 0 & (2) \\ 2z = 0 & (3) \end{array}$$

şeklinde üç denklem ele edilir. Bu üç denklemden

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow \quad y = x \\ (2) &\Rightarrow \quad y = x \\ (3) &\Rightarrow \quad z = 0 \end{aligned}$$

$z = 0$ olurken, x ve y için bağıl çözümler elde edilir. Burada sonsuz çözüm vardır. k bir sabit olmak üzere, $x = k$ dersek, $y = k$ olur. Böylece $\lambda_1 = 1$'e karşılık gelen özvektör $|x^{(1)}\rangle = (k, k, 0)$ olur. $|x^{(1)}\rangle$ normlanırsa

$$N_1^2 = \langle x^{(1)} | x^{(1)} \rangle = k^2 + k^2 = 2k^2 \Rightarrow N_1 = k\sqrt{2}$$

bulunur. Normalize $|x^{(1)}\rangle$ özvektörü

$$|x^{(1)}\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

olur. $\lambda_2 = 3$ için;

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{rr} -2y = 0 & (1) \\ -2x = 0 & (2) \\ 0x + 0y + 0z = 0 & (3) \end{array}$$

şeklinde üç denklem ele edilir. Bu üç denklemden

$$\begin{aligned}(1) &\Rightarrow \quad y = 0\\ (2) &\Rightarrow \quad x = 0\\ (3) &\Rightarrow \quad z = k\end{aligned}$$

$x = y = 0$ olur. z keyfi bir sabittir. Bu sabite k denirse, $\lambda_2 = 3$'e karşılık gelen özvektör $\left|x^{(2)}\right\rangle = (0, 0, k)$ olur. $\left|x^{(2)}\right\rangle$ normlanırsa

$$N_2^2 = \left\langle x^{(2)} \middle| x^{(2)} \right\rangle = k^2 \Rightarrow N_2 = k$$

bulunur. Böylece normalize $\left|x^{(2)}\right\rangle$ özvektörü

$$\left|x^{(2)}\right\rangle = (0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bulunur. Son olarak $\lambda_3 = 5$ için;

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} -2x - 2y &= 0 \qquad (1)\\ -2x - 2y &= 0 \qquad (2)\\ -\ 2z &= 0 \qquad (3)\end{aligned}$$

şeklindeki denklemlerden

$$\begin{aligned}(1) &\Rightarrow \quad y = -x\\ (2) &\Rightarrow \quad y = -x\\ (3) &\Rightarrow \quad z = 0\end{aligned}$$

$z = 0$ olurken, x ve y için bağıl çözümler elde edilir. Burada da sonsuz tane çözüm vardır. k bir sabit olmak üzere, $x = k$ dersek, $y = -k$ olur. Böylece $\lambda_3 = 5$'e karşılık gelen özvektör $\left|x^{(3)}\right\rangle = (k, -k, 0)$ olur. $\left|x^{(3)}\right\rangle$ normlanırsa

$$N_3^2 = \left\langle x^{(3)} \middle| x^{(3)} \right\rangle = k^2 + (-k)^2 = 2k^2 \Rightarrow N_3 = k\sqrt{2}$$

bulunur. Normalize $\left|x^{(3)}\right\rangle$ özvektörü

$$\left|x^{(3)}\right\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

b) Özvektörler sütun düzeninde yazılırsa

$$S = R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Özvektörlerin yazılış sırası önemli değildir. S^TS çarpımı yapılırsa

$$
\begin{aligned}
S^TS &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ 0 & 1 \times 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + (-\frac{1}{\sqrt{2}}) \times \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + (-\frac{1}{\sqrt{2}})(-\frac{1}{\sqrt{2}}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I
\end{aligned}
$$

bulunur. $S^TS = I$ şartını sağladığından S matrisi ortogonaldir. Bu yüzden onu R ile gösterelim. A matrisini köşegenleştirmek için R^TAR işlemi yapılırsa

$$
AR = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
A' = R^TAR = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}
$$

bulunur.

c) $detA$ ve $detA'$ hesaplanırsa

$$
detA = det \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3\,(9-0) + 2\,(-6-0) = 27 - 12 = 15
$$

$$
detA' = det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 1 \times 3 \times 5 = 15
$$

bulunur. A ve A' matrislerinin izi hesaplanırsa $TrA = 3 + 3 + 3 = 9$ ve $TrA' = 1 + 3 + 5 = 9$ bulunur. Benzerlik dönüşümü altında A ve A' matrislerinin determinantları ve izleri korunmuştur.

Örnek 5.21 $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ simetrik matrisini özvektörleri yardımıyla köşegenleştirin.

Çözüm 5.21 $det(B - \lambda I) = 0$ işlemi yapılırsa

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} = 0 \\ &= (5-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 - 4\right] \\ &= (5-\lambda)\left(\lambda^2 - 6\lambda + 5\right) \\ &= (5-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-5) = 0 \end{aligned}$$

özdeğerler $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 5$ olarak bulunur. Bu örnekte iki kök çakışıktır. Özvektörlerden ikisi, örneğin $|x^{(1)}\rangle$ ve $|x^{(2)}\rangle$ için bir önceki örnekteki gibi işlem yapılırsa; $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = 5$ için sırasıyla

$$|x^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |x^{(2)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Üçüncü özvektörün bileşenleri $|x^{(3)}\rangle = (x, y, z)$ olsun. $\langle x^{(3)}|\, x^{(2)}\rangle = \langle x^{(3)}|\, x^{(1)}\rangle = 0$ diklik ve $\langle x^{(3)}|\, x^{(3)}\rangle = 1$ normalizasyon şartı kullanılırsa

$$\langle x^{(3)}|\, x^{(2)}\rangle = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) = 0 \quad (1)$$

$$\langle x^{(3)}|\, x^{(2)}\rangle = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) = 0 \quad (2)$$

(1) ve (2) denklemlerinden $x = y = 0$ bulunur. $z = k$ keyfi bir sabittir. Böylece $|x^{(3)}\rangle = (0, 0, k)$ normlanırsa

$$|x^{(3)}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir. R ortogonal matrisi ve transpozu

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R^{-1} = R^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olur. Köşegen B' matrisi

$$B' = R^T B R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

bulunur.

Örnek 5.22 $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ ve $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ matrisleri veriliyor. **a)** A ve B matrislerinin sıra değiştirdiğini gösterin. **b)** B matrisinin özvektörleri ile A matrisini indirgeyin.

Çözüm 5.22a) AB ve BA çarpımları yapılırsa

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 5 \\ -3 & 7 & -5 \\ 5 & -5 & 15 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 5 \\ -3 & 7 & -5 \\ 5 & -5 & 15 \end{pmatrix}$$

Buna görç A ve B matrislerinin komütasyonu $[A, B] = AB - BA = 0$ 'dır. Bu matrisler için çarpım sırası önemli değildir. B matrisinin normalize özvektörleri bir önceki örnekte bulunmuştu. Bu özvektörleri kullanarak A matrisi için benzerlik dönüşümü uygulanırsa

$$A' = R^T A R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

bulunur. Hem A hem de A' matrisinin aynı $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 1$ özdeğerlerine sahip olduğu test edilebilir. Ayrıca $detA = detA' = 16$ ve $TrA = TrA' = 9$'dur.

Örnek 5.23 $A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini ve ortonormalize özvektörlerini bulun.

Çözüm 5.23 $det(A-\lambda I)=0$ denklemi çözülürse

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I) &= det\begin{pmatrix} 0-\lambda & -i \\ i & 0-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-\lambda)^2-(i)(-i)=\lambda^2-1=0 \end{aligned}$$

$\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$ bulunur. $(A-\lambda I)|x\rangle=0$ özvektör denklemi $\lambda_1=-1$ için çözülürse

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{matrix} x-iy=0 & (1) \\ ix+y=0 & (2) \end{matrix}$$

elde edilir. (1), i ile çarpılırsa (2), (2) $-i$ ile çarpılırsa (1) elde edilir. Yani (1) ve (2) bağıl çözüme sahiptir. (2)'den $y=-ix$ olur. Buna göre birinci özvektör

$$\left|x^{(1)}\right\rangle=\begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix}$$

olur. $\left|x^{(1)}\right\rangle$ normlanırsa

$$N_1^2=\left\langle x^{(1)}\middle|\,x^{(1)}\right\rangle=\begin{pmatrix} x & ix \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix}=x^2-i^2x^2=2x^2\Rightarrow N_1=x\sqrt{2}$$

$$\left|x^{(1)}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

olur. Burada iç çarpım yapılırken $\left|x^{(1)}\right\rangle$ sütun matrisinin satır matrisi olarak yazıldığına ve $i\to -i$ kompleks eşlenik işlemi yapıldığına dikkat edelim. $\lambda_2=1$ için benzer çözümler yapılırsa

$$\left|x^{(2)}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

bulunur.

Örnek 5.24 $\left|x^{(1)}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ ve $\left|x^{(2)}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ ortonormal özvektörlerini kullanarak projeksiyon matrislerini bulun ve özvektörleri $\left|x^{(1)}\right\rangle$ ve $\left|x^{(2)}\right\rangle$ olan A matrisini elde edin.

Çözüm 5.24 $\left|x^{(1)}\right\rangle$ ve $\left|x^{(2)}\right\rangle$ iki boyutlu olduklarından, bu baz vektörlerinin gerdiği uzay iki boyutlu bir kompleks uzaydır. Dolayısıyla iki tane projeksiyon matrisi bulunabilir:

$$\begin{aligned} P_1 &= \left|x^{(1)}\right\rangle\left\langle x^{(1)}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ P_2 &= \left|x^{(2)}\right\rangle\left\langle x^{(2)}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bunlar P_1 ve P_2 izdüşüm işlemcilerinin matris temsilleridir. P_1+P_2 toplamı yapılırsa

$$P_1 + P_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

bulunur. Şimdi A matrisi λ_1, λ_2, P_1 ve P_2 cinsinden hesaplanırsa

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{2}\lambda_i P_i = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = -1 \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} + 1 \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 5.25 $A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hermitik matrisin **a)** tüm özdeğer ve özvektörleri bulun. **b)** Ortonormalize özvektörlerden oluşturulan U matrisinin birimsel olduğunu gösterin ve tersini bulun.

Çözüm 5.25a) Özdeğerler için işlem yapılırsa

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= det\begin{pmatrix} 0-\lambda & -i & 0 \\ i & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0-\lambda \end{pmatrix} = 0 \\ &= (-\lambda)(-\lambda)^2 + i(-i\lambda) = 0 \\ &= -\lambda^3 + \lambda = -\lambda\left(\lambda^2 - 1\right) = 0 \end{aligned}$$

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$ olarak bulunur. Özvektörler aşağıdaki gibidir:

$\lambda_1 = -1$ için

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \quad \begin{aligned} x - iy &= 0 \quad (1) \\ ix + y &= 0 \quad (2) \\ z &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

olur. Bu üç denklemden

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow \quad iy = x \\ (2) &\Rightarrow \quad y = -ix \\ (3) &\Rightarrow \quad z = 0 \end{aligned}$$

sonucuna varılır. $z = 0$ olurken, (1) ve (2) bağıl çözümler verir. (1)'den $x = iy$ olarak alınırsa $\lambda_1 = -1$'e karşılık gelen özvektör $\left|x^{(1)}\right\rangle = (iy, y, 0)$ olur. $\left|x^{(1)}\right\rangle$ normlanırsa

$$N_1^2 = \left\langle x^{(1)}\middle| x^{(1)}\right\rangle = \begin{pmatrix} -iy & y & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} iy \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = 2y^2 \Rightarrow N_1 = y\sqrt{2}$$

bulunur. Normalize $\left|x^{(1)}\right\rangle$ özvektörü

$$\left|x^{(1)}\right\rangle = \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

olur. $\lambda_2 = 1$ için

$$\begin{pmatrix} -1 & -i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \qquad \begin{aligned} -x - iy &= 0 \qquad (1) \\ ix - y &= 0 \qquad (2) \\ -z &= 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

olur. Bu denklemlerden

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow \quad -iy = x \\ (2) &\Rightarrow \quad y = ix \\ (3) &\Rightarrow \quad z = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $z = 0$ olurken, $(1)'$den $x = -iy$ olarak alınırsa $\lambda_2 = 1$'e karşılık gelen özvektör $\left|x^{(2)}\right\rangle = (-iy, y, 0)$ olur. $\left|x^{(2)}\right\rangle$ normlanırsa

$$\left|x^{(1)}\right\rangle = \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Son olarak $\lambda_3 = 0$ için

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \qquad \begin{aligned} -iy &= 0 \qquad (1) \\ ix &= 0 \qquad (2) \\ 0x + 0y + 0z &= 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

olur. Bu denklemlerden

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow \quad y = 0 \\ (2) &\Rightarrow \quad x = 0 \\ (3) &\Rightarrow \quad z = k \end{aligned}$$

$x = y = 0$ olmaktadır. Eğer $z = 0$ seçilirse özvektör 0 olur. Aşikar olmayan çözüm için $z \neq 0$ olan keyfi bir sabit olmak zorundadır. $\lambda_3 = 0$'a karşılık gelen özvektör $\left|x^{(3)}\right\rangle = (0, 0, k)$ olur. $\left|x^{(3)}\right\rangle$ normlanırsa

$$\left|x^{(3)}\right\rangle = (0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

b) Özvektörler sütun düzeninde yazılırsa, U matrisi

$$U = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olur. $U^\dagger U$ çarpımı yapılırsa

$$U^\dagger U = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} & \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} & \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

bulunur. $U^\dagger U = I$ olduğundan U matrisi üniterdir. U^{-1} ile $U^\dagger$ özdeştir:

$$U^{-1} = U^\dagger = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \blacksquare$$

Eylemsizlik Momenti ve Asal Eksenler

Karetezyen koordinatlarda, n parçacıktan oluşan katı bir cismin toplam açısal momentum vektörü $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$, açısal hız vektörü $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ cinsinden

$$\mathbf{L} = \widetilde{I}\omega \Rightarrow \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{xy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{5.72}$$

olarak verilir. Burada $\widetilde{I}$ eylemsizlik momenti tensörü olarak isimlendirilir. 9 bileşenli simetrik bir tensördür. Eylemsizlik tensörünün bileşenleri

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^{n} m_i(r_i^2 - x_i^2), \quad I_{xy} = -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i, \quad I_{xz} = -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i$$

$$I_{yx} = I_{xy}, \quad I_{yy} = \sum_{i=1}^{n} m_i(r_i^2 - y_i^2), \quad I_{yz} = -\sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i$$

$$I_{zx} = I_{xz}, \quad I_{zy} = I_{yz}, \quad I_{zz} = \sum_{i=1}^{n} m_i(r_i^2 - z_i^2)$$

ifadeleri kullanılarak hesaplanır. Burada m_i, i. parçacığın kütlesi, $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, i. parcağın konum vektörüdür. $\widetilde{I}$ matrisi reel ve simetriktir.

Özvektörler asal eksenleri gösterir ve özvektörler sütun düzeninde yazarak oluşturulan matris ortogonaldir.

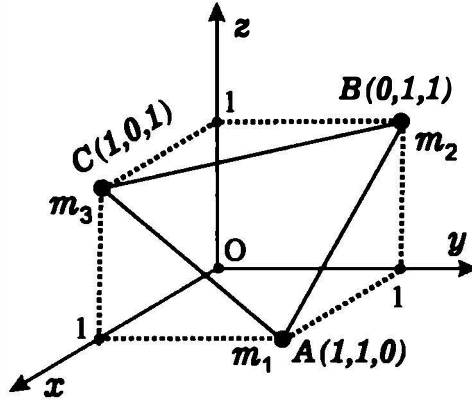
$$\widetilde{I}' = R^{-1}\widetilde{I}R$$

dönüşümü yapılırsa $\widetilde{I}$ matrisi köşegen hale gelir. Bu durumda (5.72) ile verilen denklem

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I'_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I'_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{5.73}$$

şeklinde basitleşir ve açısal momentum vektörü $\mathbf{L}$, $\boldsymbol{\omega}$ açısal hız vektörüne paralel olur.

Örnek 5.26



Şekil 5.4 Üç parçacıklı bir katı cisim

Şekil 5.4'te görüldüğü gibi kartezyen koordinat sisteminde $A(1,1,0)$ metre noktasına m_1, $B(0,1,1)$ metre noktasına m_2 ve $C(1,0,1)$ metre noktasına m_3 kütleleri konulmuş ve kütlesi ihmal edilebilen çubuklarla birbirlerine bağlanarak bir katı cisim oluşturulmuştur. **a)** Sistemin eylemsizlik moment tensörünü bulun $\widetilde{I}$ =? **b)** $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ kg için $\widetilde{I}$ matrisinin tüm özdeğerlerini ve özvektörlerini bulunuz. **c)** $\widetilde{I}$ eylemsizlik momenti matrisini köşegenleştirin.

Çözüm 5.26a) A noktasının koordinatları $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $z_1 = 0$, B noktasının koordinatları $x_2 = 0$, $y_2 = 1$, $z_2 = 1$, C noktasının koordinatları $x_3 = 1$, $y_3 = 0$, $z_3 = 1$ olduğundan, konum vektörleri sırasıyla $\mathbf{r}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ve $\mathbf{r}_3 = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ olur. Buna göre $r_1^2 = r_2^2 = r_3^2 = 2$ bulunur. Eylemsizlik tensörünün bileşenleri;

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum_{i=1}^{3} m_i(r_i^2 - x_i^2) = m_1(r_1^2 - x_1^2) + m_2(r_2^2 - x_2^2) + m_3(r_3^2 - x_3^2) \\ &= m_1\,(2-1) + m_2\,(2-0) + m_3\,(2-1) = m_1 + 2m_2 + m_3 \end{aligned}$$

$$I_{xy} = -\sum_{i=1}^{3} m_i x_i y_i = -\left(m_1 x_1 y_1 + m_2 x_2 y_2 + m_3 x_3 y_3\right) = -m_1$$

$$I_{xz} = -\sum_{i=1}^{3} m_i x_i z_i = -\left(m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 + m_3 x_3 z_3\right) = -m_3$$

$$\begin{aligned} I_{yy} &= \sum_{i=1}^{3} m_i (r_i^2 - y_i^2) = m_1(r_1^2 - y_1^2) + m_2(r_2^2 - y_2^2) + m_3(r_3^2 - y_3^2) \\ &= m_1\,(2-1) + m_2\,(2-1) + m_3\,(2-0) = m_1 + m_2 + 2m_3 \end{aligned}$$

$$I_{yz} = -\sum_{i=1}^{3} m_i y_i z_i = -\left(m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2 + m_3 y_3 z_3\right) = -m_2$$

$$\begin{aligned} I_{zz} &= \sum_{i=1}^{n} m_i (r_i^2 - z_i^2) = m_1(r_1^2 - z_1^2) + m_2(r_2^2 - z_2^2) + m_3(r_3^2 - z_3^2) \\ &= m_1\,(2-0) + m_2\,(2-1) + m_3\,(2-1) = 2m_1 + m_2 + m_3 \end{aligned}$$

$$I_{yx} = I_{xy} = -m_1,\ I_{zx} = I_{xz} = -m_3,\ I_{zy} = I_{yz} = -m_2$$

olarak hesaplanır. Buna göre eylemsizlik momenti tensörü

$$\begin{aligned} \tilde{I} &= \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_1 + 2m_2 + m_3 & -m_1 & -m_3 \\ -m_1 & m_1 + m_2 + 2m_3 & -m_2 \\ -m_3 & -m_2 & 2m_1 + m_2 + m_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur.

b) $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ kg değerleri yerine yazılırsa

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu matrisin özdeğerleri için işlem yapılırsa

$$\begin{aligned} det\left(\tilde{I} - \lambda I\right) &= \begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 4-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 0 \\ &= (4-\lambda)\left[(4-\lambda)^2 - 1\right] - (-1) \times [-(4-\lambda) - 1] \\ &\quad + (-1) \times [1 + (4-\lambda)] \\ &= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 45\lambda + 50 = 0 \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$ bulunur. Sistem iki kat dejeneredir. Yani iki asal eksene karşılık eylemsizilik momenti aynı olmaktadır: $\lambda_2 = \lambda_3 = 5$. Özvektörler $\lambda_1 = 2$ için;

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} 2x - y - z = 0 & (1) \\ -x + 2y - z = 0 & (2) \\ -x - y + 2z = 0 & (3) \end{matrix}$$

$x = y = z = 1$ için denklemler sağlanır. Böylece $\lambda_1 = 2$'e karşılık gelen normalize özvektör

$$\left| x^{(1)} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

olur. $\lambda_2 = 5$ için;

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} -x - y - z = 0 & (1) \\ -x - y - z = 0 & (2) \\ -x - y - z = 0 & (3) \end{matrix}$$

olur. Her üç denklem de aynıdır. Buradan $z = -x - y$ yazılabilir. $x = 1$ ve $y = -1$ seçilirse $z = 0$ olur. $\lambda_2 = 5$'e karşılık gelen $\left| x^{(2)} \right\rangle$ normalize özvektör

$$\left| x^{(2)} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. $\left\langle x^{(3)} \middle| x^{(1)} \right\rangle = \left\langle x^{(3)} \middle| x^{(2)} \right\rangle = 0$ dik olma ve $\left\langle x^{(3)} \middle| x^{(3)} \right\rangle = 1$ normalizasyon şartları kullanılırsa

$$\left| x^{(3)} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

bulunur. $\left| x^{(2)} \right\rangle$'yi bulurken şüphesiz $y = -x - z$ veya $x = -y - z$ gibi denklemler yazılabilir ve x, y, z'nin farklı seçimleri yapılabilir. Bu farklı seçimler, farklı özvektörlere dolayısıyla farklı asal eksenlere götürür. Bu da farklı asal eksen kümelerinin varlığına işaret eder.

c) Özvektörleri sütun düzeninde yazarak R ortogonal matrisi

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. R matrisin tersi $R^{-1} = R^T$ olduğundan, $\widetilde{I}$ matrisi

$$\widetilde{I}R = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{10}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{I}' = R^{-1}\widetilde{I}R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{5}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{10}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

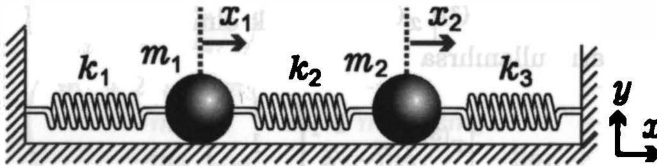
$$\widetilde{I}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

şeklinde indirgenir. $|x^{(1)}\rangle$ vektörünün, m_1, m_2 ve m_3 kütlelerinin içinde olduğu düzlemin normali ile aynı olduğunu belirtmekte yarar var.■

Birleşik Yay-Kütle Sistemlerinin Titreşimleri: Normal Modlar

Sürtünmesiz bir zeminde iki veya daha fazla kütleyi yaylarla birbirine bağlayarak elde edilen birleşik bir sisteme ait titreşim modlarını elde etmek istiyoruz. Basitlik açısından sistemin bir boyutta, örneğin x ekseni boyunca titreştiğini ve yay kütlelerinin, titreşen kütlelere göre küçük kalıp ihmal edildiğini varsayalım. Böyle bir problem, özdeğer problemi olarak ele alınabilir. Bunu bir örnekle izah edelim.

Örnek 5.27 Şekil 5.5'te verilen yay-kütle sisteminin titreşim modlarını bulun.



Şekil 5.5 İki kütle üç yay sistemi

Çözüm 5.27 Şekil 5.5'te görüldüğü gibi denge konumuna göre m_1 kütlesi x_1, m_2 kütlesi ise x_2 kadar yerdeğiştirmiş olsun. Her bir kütle için Newton'un hareket kanunundan yararlanarak hareket denklemleri yazılırsa

$$\begin{aligned} m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} &= m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) \\ m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} &= m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - k_3x_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemler x_1 ve x_2'ye göre düzenlenirse

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\frac{(k_1 + k_2)}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 \\ \ddot{x}_2 &= \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{(k_2 + k_3)}{m_2}x_2 \end{aligned}$$

bulunur. Burada titreşen kütlelerin ortak ω frekanslarını bulmak istiyoruz. Bu frekanslara normal modlar denir. Sistemin serbestlik derecesine bağlı olarak oluşan modların sayısı bulunabilir. Örneğimizde her bir kütle sadece x boyunca hareket ettiğine göre serbestlik derecesi 1'dir. Ancak iki kütle için bu sayı 2'dir. Yani 2 tane titreşim modu bulunabilir. Kütlere bağlı yayların boylarındaki değişim yani, genliklerinin zamanla değişimi

$$x_l = x_{l0} e^{i\omega t}, \; l = 1, 2$$

olarak verilebilir. Burada x_{l0}, $t = 0$ anındaki genliklerdir. Zamana göre ikinci türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\omega^2 x_{10} e^{i\omega t} = -\omega^2 x_1 \\ \ddot{x}_2 &= -\omega^2 x_{20} e^{i\omega t} = -\omega^2 x_2 \end{aligned}$$

özdeğer denklemleri elde edilir. $\ddot{x}_1$ ve $\ddot{x}$ daha önce verilen denklemlerde yerine konur ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} -\omega^2 x_1 &= -\frac{(k_1+k_2)}{m_1} x_1 + \frac{k_2}{m_1} x_2 \Rightarrow \left[\frac{(k_1+k_2)}{m_1} - \omega^2\right] x_1 - \frac{k_2}{m_1} x_2 = 0 \\ -\omega^2 x_2 &= \frac{k_2}{m_2} x_1 - \frac{(k_2+k_3)}{m_2} x_2 \Rightarrow -\frac{k_2}{m_2} x_1 + \left[\frac{(k_2+k_3)}{m_2} - \omega^2\right] x_2 = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $\omega^2 = \lambda$ alarak bu özdeğer denklemleri matris biçiminde yazılırsa

$$\begin{pmatrix} \frac{(k_1+k_2)}{m_1} - \lambda & -\frac{k_2}{m_1} \\ -\frac{k_2}{m_2} & \frac{(k_2+k_3)}{m_2} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

olur. Buradan λ özdeğerleri bulunabilir. Ancak problemi basitleştirmek için $k_1 = k_2 = k_3 = k$ ve $m_1 = m_2 = m$ özel durumu ele alınırsa

$$\begin{aligned} det\begin{pmatrix} \frac{2k}{m} - \lambda & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - \lambda \end{pmatrix} &= \lambda^2 - \frac{4k}{m}\lambda + \frac{3k^2}{m^2} = 0 \\ &= \left(\lambda - \frac{k}{m}\right)\left(\lambda - \frac{3k}{m}\right) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Özdeğerler $\lambda_1 = \frac{k}{m}$ ve $\lambda_2 = \frac{3k}{m}$ olarak bulunur. Titreşim frekansları

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \lambda_2 &= \omega^2 = \frac{3k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3k}{m}} \end{aligned}$$

olur. Özvektörler: $\lambda_1 = \frac{k}{m}$ için

$$\begin{pmatrix} \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{ll} \frac{k}{m}(x_1 - x_2) = 0 & (1) \\ \frac{k}{m}(-x_1 + x_2) = 0 & (2) \end{array}$$

bulunur. Bu denklemlerden $x_1 = x_2 = 1$ ve normalize özvektör

$$\left|x^{(1)}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

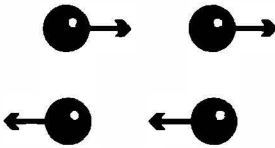
olarak elde edilir. $\lambda_2 = \frac{3k}{m}$ için ise

$$\begin{pmatrix} -\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{ll} -\frac{k}{m}(x_1 + x_2) = 0 & (1) \\ -\frac{k}{m}(x_1 + x_2) = 0 & (2) \end{array}$$

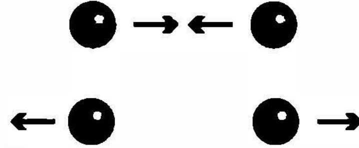
elde edilir. Bu denklemlerden $x_2 = -x_1 = 1$ ve normalize özvektör

$$\left|x^{(2)}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Öyleyse sistem iki özgün frekansta titreşebilir. Birincisi $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ frekanslı simetrik salınımdır. m_1 ve m_2 kütleleri aynı anda $+x$ yönünde veya aynı anda $-x$ yönünde eşit miktarda yerdeğiştirecek şekilde titreşmektedir(Şekil 5.6a). İkincisi ise daha yüksek $\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ frekanslı anti simetrik salınımdır. m_1, $+x$ yönünde yerdeğiştirirken m_2, $-x$ yönünde veya m_2, $+x$ yönünde yerdeğiştirirken m_1, $-x$ yönünde eşit miktarda yer değiştirmektedir(Şekil 5.6b).



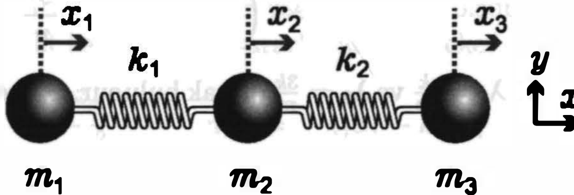
Şekil 5.6a Simetrik mod



Şekil 5.6b Anti simetrik mod

Sistemin bu titreşim modlarından hangisinde titreşeceğini başlangıç koşulları belirler.

Örnek 5.28 Şekil 5.7'te verilen yay-kütle sisteminin titreşim modlarını bulun.



Şekil 5.7 Üç kütle iki yay sistemi

Çözüm 5.28 Şekil 5.7'te görüldüğü gibi denge konumuna göre m_1 kütlesi x_1, m_2 kütlesi x_2 ve m_3 kütlesi x_3 kadar yerdeğiştirmiş olsun. Hareket denklemleri yazılırsa

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = m_1\ddot{x}_1 = -k_1(x_1 - x_2)$$

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = m_2\ddot{x}_2 = -k_1(x_2 - x_1) - k_2(x_2 - x_3)$$

$$m_3\frac{d^2x_3}{dt^2} = m_3\ddot{x}_3 = -k_2(x_3 - x_2)$$

Bu denklemler x_1, x_2 ve x_3'e göre düzenlenirse

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 = -\frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{k_1}{m_1}x_2$$

$$\ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2 = \frac{k_1}{m_2}x_1 - \frac{(k_1 + k_2)}{m_2}x_2 + \frac{k_2}{m_2}x_3$$

$$\ddot{x}_3 = -\omega^2 x_3 = \frac{k_2}{m_3}x_2 - \frac{k_2}{m_3}x_3$$

olur. $\omega^2 = \lambda$ alınarak özdeğer denklemi

$$\begin{pmatrix} \frac{k_1}{m_1} - \lambda & -\frac{k_1}{m_1} & 0 \\ -\frac{k_1}{m_2} & \frac{(k_1+k_2)}{m_2} - \lambda & -\frac{k_2}{m_2} \\ 0 & -\frac{k_2}{m_3} & \frac{k_2}{m_3} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

olarak elde edilir. $k_1 = k_2 = k$ ve $m_1 = m_2 = m_3 = m$ özel durumu için bu özdeğer denklemi

$$\begin{pmatrix} \frac{k}{m} - \lambda & -\frac{k}{m} & 0 \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - \lambda & -\frac{k}{m} \\ 0 & -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

durumuna indirgenir. Bu denklemin çözülmesiyle özdeğerler ve özvektörler

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \omega_1 = 0, \quad x_1 = x_2 = x_3 \Rightarrow |x^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad x_2 = 0,\ x_3 = -x_1 \Rightarrow |x^{(2)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = \frac{3k}{m} \Rightarrow \omega_3 = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad x_2 = -2x_1,\ x_3 = -\frac{1}{2}x_2 \Rightarrow |x^{(3)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.







Şekil 5.8 Üç kütle sisteminin titreşim modları

Bu örnekte üç özdeğer elde edilmiştir. $\omega_1 = 0$ özdeğerine karşılık gelen durum bir titreşim hareketi değildir. Her üç kütle eşit miktarda $+x$ yönünde(veya $-x$ yönünde) yer değiştirmekte yani ötelenmektedir(Şekil 5.8a). Bu durumda yaylarda oluşan net kuvvet sıfırdır. $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ frekanslı titreşimde ise ortadaki kütle sabit kalırken diğer iki kütle antisimetrik hareket yapmaktadır. Yani m_1 ve m_3 kütleleri, durgun m_2 kütlesine eşit miktarda yaklaşmakta veya uzaklaşmaktadır(Şekil 5.8b). $\omega_3 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ frekanslı üçüncü modda ise m_2 kütlesi $-x$ yönünde 2 birim yerdeğiştirirken, m_1 ve m_3 kütleleri bunun tersi $+x$ yönünde 1'er birim yer değiştirmektedir(Şekil 5.8c). Yada bunun tersine m_2 kütlesi x yönünde 2 birim yerdeğiştirirken, m_1 ve m_3 kütleleri $-x$ yönünde 1'er birim yer değiştirmektedir.

BÖLÜM SONU PROBLEMLERİ

5.1 Dört boyutlu vektör uzayında $\mathbf{a}_1 = (1,2,-1,3)$, $\mathbf{a}_2 = (2,4,1,-2)$ ve $\mathbf{a}_3 = (3,6,3,-7)$ vektörleri veriliyor. Temel satır işlemlerini yaparak lineer bağımsız vektörlerin sayısını bulun.

İpucu: İndirgenmiş matris $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5.2 Üç boyutlu vektör uzayında verilen $\mathbf{a}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{a}_2 = (2,1,-1)$ ve $\mathbf{a}_3 = (-1,1,5)$ vektörlerin lineer bağımlı olduklarını gösterin ve $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3 = 0$ eşitliğini sağlayan α_1, α_2 ve α_3 sabitlerini bulun.

5.3 Gram-Schmidt metodu yardımıyla $\mathbf{a}_1 = (1,1,0)$, $\mathbf{a}_2 = (1,0,1)$ ve $\mathbf{a}_3 = (0,1,1)$ lineer bağımsız vektörlerden ortonormal bir vektör kümesi elde edin.

5.4 $[0,+\infty]$ aralığında tanımlı $f_1(x) = e^{-x}$, $f_2(x) = e^{-2x}$ ve $f_3(x) = e^{-3x}$ fonksiyonları veriliyor. Bu fonksiyonların lineer bağımsız olduklarını gösterdikten sonra Gram-Schmidt metodu ile ortonormal bir fonksiyon ailesi elde ediniz.

5.5 $f_n(x) = x^n$, $n = 0,1,2$, $0 \le x \le \infty$ fonksiyonları ve $\omega(x) = xe^{-x}$ ağırlık fonksiyonunu kullanarak ortonormal $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ ve $\phi_3(x)$ fonksiyonlarını elde edin. Gerektiğinde $\int_0^\infty x^m e^{-x}dx = m!$ integralini kullanın.
Cevap: $\phi_1(x) = 1$, $\phi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-2)$, $\phi_3(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(x^2 - 6x + 6)$.

5.6 $[-\pi,+\pi]$ aralığında tanımlı $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = Sin^2x$ ve $f_3(x) = Cos^2x$ fonksiyonları veriliyor. Bu fonksiyonların lineer bağımsız olup olmadıklarını gösterin.

5.7 İki boyutlu kartezyen koordinatlarda bir vektörü saat ibresi tersine θ_1 kadar döndüren işlemcinin matris temsili $R(\theta_1)$, θ_2 kadar döndüren işlemcinin matris temsili $R(\theta_2)$ olsun. Bu vektörü bir defada $(\theta_1 + \theta_2)$ kadar döndüren işlemcinin matris temsili için $R(\theta_1 + \theta_2) = R(\theta_1)R(\theta_2)$ olduğunu gösterin.

5.8 Üç boyutlu Öklid uzayında bir vektörü x ekseni etrafında pozitif θ kadar döndüren işlemcinin matris temsilini bulun.

5.9 Bir T dönüşümü $|a\rangle = (x, y, z)$ vektörüne etki ederek aynı bazda $|b\rangle = (x+2y-z, y+z, x+y-2z)$ vektörüne dönüştürüyor. Bu dönüşümün matris temsilini bulunuz.

5.10 Üç boyutlu Öklid uzayında P parite işlemcisinin $|r\rangle$ yer vektörüne etkisi

$$P\,|r\rangle = |-r\rangle \Rightarrow P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

şeklindedir. P işlemcisinin matris temsilini bulunuz. *İpucu:* P matrisi -1 ile ilişkidir.

5.11 Aşağıda verilen işlemcilerin lineer olup olmadıklarını bulun.
a) $\widehat{O}$ operatörünün $\Psi(x)$ fonksiyonuna etkisi: $\widehat{O}\Psi(x) = 5\Psi(x) + x$
b) $A = \frac{d^2}{dx^2} + ix$

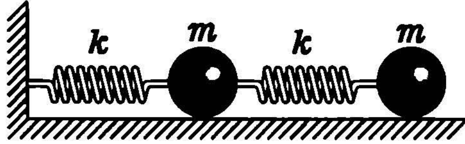
5.12 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulun.
Cevap: $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2$. $|x^{(1)}\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $|x^{(2)}\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $|x^{(3)}\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

5.13 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini bulun.
Cevap: $\lambda = -1, 1, 2$.

5.14 $H = \begin{pmatrix} 4 & i & 1 \\ -i & 6 & -i \\ 1 & i & 4 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulun.
Cevap: $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 3$. $|x^{(1)}\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2i}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $|x^{(2)}\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $|x^{(3)}\rangle = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

5.15 Kartezyen koordinat sisteminde $A(1,1,1)$ metre noktasına $m_1 = 1$ kg, $B(-1,-1,-1)$ metre noktasına $m_2 = 1$ kg kütleleri konulmuş ve çok hafifbir çubuklla birbirlerine bağlanarak bir katı cisim oluşturulmuştur. **a)** Eylemsizlik momenti tensörünü bulun $\tilde{I} = ?$ **b)** $\tilde{I}$ eylemsizlik momenti matrisini köşegenleştirerek asal eksenleri elde edin.

5.16 Şekil 5.9'da verilen birleşik yay-kütle sisteminin titreşim modlarını bulun.

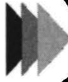


Şekil 5.9 İki kütle iki yay sistemi

5.17 L_+ açısal momentum merdiven işlemcisinin $|lm\rangle$ fonksiyonuna etkisi

$$L_+ |lm\rangle = \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\hbar\, |lm+1\rangle$$

şeklindedir. $l = 1$ ve $m = 1, 0, -1$ değerlerine karşılık gelen $|11\rangle$, $|10\rangle$ ve $|1-1\rangle$ ortonormalize fonksiyonları kullanarak L_+ işlemcisinin matris temsilini bulun.



BÖLÜM 6 BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR ve ORTOGONAL POLİNOMLAR

Bu bölümde; Gama, Beta ve Hata fonksiyonlarını verdikten sonra, Fiziğin bir çok alanında sıkça karşılaşılan Hermite, Legendre, Laguerre polinomları ile Bessel fonksiyonlarını detaylarıyla ele alacağız.

6.1 Gama Fonksiyonu

Bu kesimde, Gama fonksiyonu olarak isimlendirilen

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt, \ n > 0 \tag{6.1}$$

biçimindeki integrali ele alalım. Şimdilik, n pozitif bir tam sayı olsun. Gama integralleri, hidrojen benzeri atomların dalga fonksiyonlarını normlarken veya istatistik dağılımlarıyla ilgilenirken karşımıza çıkar. $n = 1$ için (6.1) integrali hesaplanırsa

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = -\ell im_{t\to\infty}e^{-t} + e^0 = 0 + 1 = 1$$

bulunur. $n+1$ için Gama fonksiyonu

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t}dt$$

yazılabilir. Bu integrali kısmi integral yöntemiyle çözmek istiyoruz. $u = t^n$ ve $dv = e^{-t}dt$ olarak alınırsa

$$u = t^n \Rightarrow du = nt^{n-1}dt$$
$$dv = e^{-t}dt \Rightarrow v = -e^{-t}$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= \int_0^\infty t^n e^{-t}dt = uv - \int vdu \\ &= \underbrace{-t^n e^{-t}\Big|_0^\infty}_{=0} + n\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}dt\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\ell im_{t\to\infty} e^{-t} \to 0$ ve $\ell im_{t\to 0} t^n \to 0$ olduğundan birinci terim sıfır olur. İkinci integral $\Gamma(n)$ olduğundan

$$\Gamma(n+1) = n\ \Gamma(n) \tag{6.2}$$

yazılabilir. Bu tekrarlama bağıntısıdır. (6.2) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
n &= 1 \Rightarrow \Gamma(1+1) = \Gamma(2) = 1\ \Gamma(1) = 1.1 = 1! \\
n &= 2 \Rightarrow \Gamma(3) = 2\ \Gamma(2) = 2.1 = 2! \\
n &= 3 \Rightarrow \Gamma(4) = 3\ \Gamma(3) = 3.2! = 3! \\
n &= 4 \Rightarrow \Gamma(5) = 4\ \Gamma(4) = 4.3! = 4!
\end{aligned}$$

elde edilir. Böyle devam edilirse, pozitif tam sayılı Gama için

$$\Gamma(n+1) = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(2)\,(1) = n! \tag{6.3}$$

sonucu elde edilir. $n!$ nedeniyle faktöriyel fonksiyonu olarak adlandırılır. Bu şekilde tüm pozitif tamsayılar için Gama integrali hesaplanabilir. Artan n değerlerinde Gama integralinin değeri çok hızlı bir biçimde artar. $n \to \infty$ için, $\Gamma(n) \to \infty$ 'a gider. Pozitif tam sayılardan sonra kesirli sayılar için Gama integralini hesaplamak istiyoruz. Bunun için n yerine x yazmak adettir. Artık x, $0 < x < \infty$ aralığında her değeri alabilir. Bu aşamada $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$... gibi yarım tam sayıları için Gama fonksiyonunu bulmak istersek ne yapmalıyız. Yukarıda $\Gamma(1)$'den başlayarak diğer tamsayılar için bir tekrarlama bağıntısı bulunmuştu. Acaba yarım tam sayılı $\Gamma(x)$'i bulmak için $x = \frac{1}{2}$ başlangıç değeri olarak seçilebilir mi? Cevap evettir. $\Gamma(x)$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \ 0 < x < \infty$$

şeklinde yazılabilir. $x = \frac{1}{2}$ için

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt$$

olur. Burada $u = t^{\frac{1}{2}}$ değişken değişikliği yapılırsa

$$u = t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow t = u^2 \text{ ve } \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt = du \Rightarrow t^{-\frac{1}{2}} dt = 2du$$

olur. İntegralin sınırları aynı kalır. Buna göre

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-u^2} du$$

bulunur. $I = \int_0^\infty e^{-u^2} du$ diyelim. Bu integralde u değişkeni yerine x veya y yazılırsa integralin sonucu değişmez.

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx, \ I = \int_0^\infty e^{-y^2} dy$$

Buradaki x ve y kartezyen koordinatların pozitif değerleridir. Bu iki integral çarpılırsa

$$I^2 = \int_{x=0}^\infty \int_{y=0}^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

yüzey integrali elde edilir. İntegral $0 \le x \le \infty$ ve $0 \le y \le \infty$ ile sınırlanan bölge üzerindendir. Bu integral kutupsal koordinatlarda kolayca çözülür. Bunun için $x = rCos\theta$ ve $y = rSin\theta$ denirse, $x^2 + y^2 = r^2$ olur. $dxdy$'in kartezyen koordinatlarda yüzey elemanı olduğu ve kutupsal koordinatlardaki eşdeğerinin

$$da = dxdy = rdrd\theta$$

ile verildiği hatırlanırsa I^2 için

$$I^2 = \int_{r=0}^\infty \int_{\theta=0}^{\pi/2} e^{-r^2} rdrd\theta = \int_{r=0}^\infty e^{-r^2} rdr \int_{\theta=0}^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2} \int_{r=0}^\infty e^{-r^2} rdr$$

bulunur. Sınırlar uygun biçimde değiştirilmiştir. Son kez olarak $r^2 = w$ değişken değişikliği yapılırsa, $rdr = \frac{1}{2} dw$ olur. Bu durumda

$$I^2 = \frac{\pi}{2} \int_{r=0}^\infty e^{-r^2} rdr = \frac{\pi}{4} \int_{w=0}^\infty e^{-w} dw = - \left. \frac{\pi}{4} e^{-w} \right|_0^\infty = \frac{\pi}{4}$$

bulunur. Geriye doğru gidilirse, $I^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ olur. Sonuç olarak $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ için

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \sqrt{\pi} \tag{6.4}$$

bulunmuş olur. (6.3) ile verilen tekrarlama bağıntısı yarım tamsayılara uyarlanırsa

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

yazılabilir. x'in bazı değerleri için Gama integrali hesaplanırsa

$$
\begin{aligned}
x &= 1/2 \Rightarrow \Gamma(1/2+1) = \Gamma(1+1/2) = \frac{1}{2}\,\Gamma(1/2) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \\
x &= 3/2 \Rightarrow \Gamma(3/2+1) = \Gamma(2+1/2) = \frac{3}{2}\,\Gamma(3/2) = \frac{3}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \\
x &= 5/2 \Rightarrow \Gamma(5/2+1) = \Gamma(3+1/2) = \frac{5}{2}\,\Gamma(5/2) = \frac{5}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \\
x &= 7/2 \Rightarrow \Gamma(7/2+1) = \Gamma(4+1/2) = \frac{7}{2}\Gamma(7/2) = \frac{7}{2}.\frac{5}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

elde edilir. n tam sayı olmak üzere genel kural

$$\Gamma(n+1/2) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.5}$$

olarak yazılabilir. Burada $2n-1$ tek sayısı için, $(2n-1)!!$ çift faktöriyel fonksiyonunda sayılar ikişer ikişer azalarak çarpılır ve 1'de son bulur.

$$(2n-1)!! = (2n-1)\,(2n-3)\,(2n-5)\ldots 3.1$$

Örneğin; $9!! = 9.7.5.3.1$ şeklindedir.

$n < 0$ tam sayıların faktöriyeli $n! = \mp\infty$ olduğundan, Gama fonksiyonu $\mp\infty$ değerini alır. Çünkü çarpıma giren negatif sayının bir alt sınırı yoktur. Acaba tamsayılar dışında kalan sayılar için durum nedir? $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ tekrarlama bağıntısı

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \tag{6.6}$$

şeklinde yazılır ve $x = -1/2$ için hesap yapılırsa

$$\Gamma(-1/2) = \frac{\Gamma(1/2)}{-1/2} = -\frac{2}{1}\sqrt{\pi}$$

bulunur. $\Gamma(-1/2)$ değerinden başlanarak bazı negatif yarım tam sayılar için hesap yapılırsa

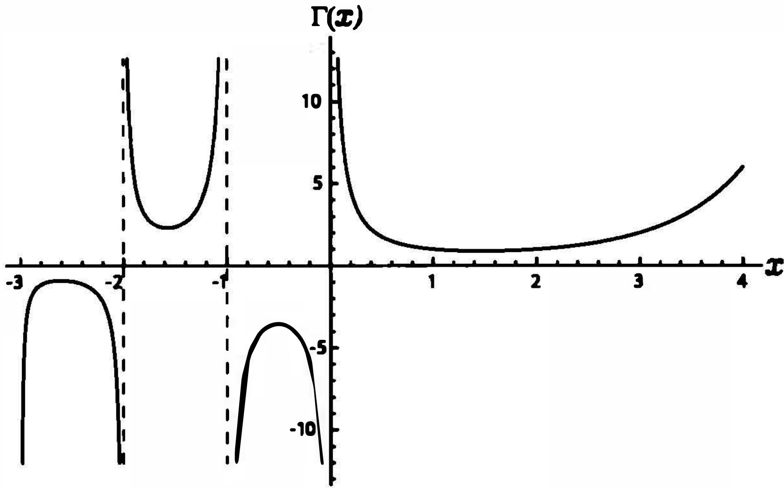
$$
\begin{aligned}
x &= -3/2 \Rightarrow \Gamma(-3/2) = \frac{\Gamma(-1/2)}{-3/2} = +\frac{2}{3}.\frac{2}{1}\sqrt{\pi} \\
x &= -5/2 \Rightarrow \Gamma(-5/2) = \frac{\Gamma(-3/2)}{-5/2} = -\frac{2}{5}.\frac{2}{3}.\frac{2}{1}\sqrt{\pi} \\
x &= -7/2 \Rightarrow \Gamma(-7/2) = \frac{\Gamma(-5/2)}{-7/2} = +\frac{2}{7}.\frac{2}{5}.\frac{2}{3}.\frac{2}{1}\sqrt{\pi} \\
x &= -9/2 \Rightarrow \Gamma(-9/2) = \frac{\Gamma(-7/2)}{-9/2} = -\frac{2}{9}.\frac{2}{7}.\frac{2}{5}.\frac{2}{3}.\frac{2}{1}\sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu sonuçları, n tam sayı olmak üzere

$$\Gamma(1/2-n)=(-1)^n.\frac{2^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi},\quad n=1,2,3,... \tag{6.7}$$

biçiminde genellemek mümkündür.

Teorik olarak $x=0,-1,-2,-3,....,-n$ tamsayıları hariç, Gama integralini hesaplamak mümkün gözükmekle birlikte kolay değildir. Fakat sayısal integral yöntemleriyle Gama fonksiyonunu hesaplamak daha pratiktir. $[-3,4]$ aralığında $\Gamma(x)$ fonksiyonunun x'e bağlı grafiği Şekil 6.1'deki gibidir.



Şekil 6.1 $\Gamma(x)$ fonksiyonunun x'e göre değişimi

Örnek 6.1 $\int\limits_0^\infty x^n e^{-\alpha x}dx,\ \alpha>0$ integralini Gama integrali cinsinden yazarak hesaplayın.

Çözüm 6.1 $\alpha x=t$ denirse

$$x=\frac{t}{\alpha}\Rightarrow\ x^n=\frac{t^n}{\alpha^n},\quad dx=\frac{dt}{\alpha}$$

olur. Bunlar yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\int\limits_0^\infty x^n e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha^{n+1}}\int\limits_0^\infty t^n e^{-t}dt=\frac{1}{\alpha^{n+1}}\Gamma(n+1)=\frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

bulunur.

Örnek 6.2 $\int\limits_0^\infty x^m e^{-\alpha x^n}dx\ n,m>0$, biçiminde verilen integrali, Gama integrali cinsinden elde edin.

Çözüm 6.2 $\alpha x^n = t$ olsun. Bu durumda

$$x = \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{1/n} \Rightarrow x^m = \frac{t^{m/n}}{\alpha^{m/n}}$$

$$\alpha x^n = t \Rightarrow n\alpha x^{n-1}dx = dt \Rightarrow n\alpha\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\frac{n-1}{n}} dx = dt$$

$$\Rightarrow dx = \frac{1}{n\alpha}\frac{\alpha^{\frac{n-1}{n}}}{t^{\frac{n-1}{n}}}dt$$

olur. $x = 0$ için $t = 0$, $x = \infty$ için $t = \infty$ olduğundan, integralin sınırları değişmez. Çünkü olur. Bu ifadeler yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^m e^{-\alpha x^n} dx &= \int_0^\infty \left(\frac{t^{m/n}}{\alpha^{m/n}}\right)\left(\frac{1}{n\alpha}\frac{\alpha^{\frac{n-1}{n}}}{t^{\frac{n-1}{n}}}\right) e^{-t}dt \\ &= \frac{1}{n\alpha}\left(\frac{\alpha^{\frac{n-1}{n}}}{\alpha^{m/n}}\right)\int_0^\infty \left(\frac{t^{m/n}}{t^{\frac{n-1}{n}}}\right) e^{-t}dt \\ &= \frac{1}{n\alpha^{\left(\frac{m+1}{n}\right)}}\int_0^\infty t^{\left(\frac{m+1}{n}-1\right)} e^{-t}dt\end{aligned}$$

elde edilir. (6.1) ile karşılaştırılırsa, bu integralin $\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$ olduğu görülür. Böylece, hesaplanması istenilen integral

$$\int_0^\infty x^m e^{-\alpha x^n} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)}{n\alpha^{\left(\frac{m+1}{n}\right)}} \tag{6.8}$$

olarak elde edilir.

Örnek 6.3 $\Gamma(x) = 2\int_0^\infty t^{2x-1}e^{-t^2}dt$ olduğunu gösterin.

Çözüm 6.3 (6.8) eşitliğinde $x \to t$ yazılırsa

$$\int_0^\infty t^m e^{-\alpha t^n} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)}{n\alpha^{\left(\frac{m+1}{n}\right)}}$$

integralin sonucu değişmez. Bu ifadede $m = 2x - 1$, $\alpha = 1$, $n = 2$ yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\int_0^\infty t^{2x-1}e^{-t^2}dt = \frac{\Gamma\left(\frac{2x-1+1}{2}\right)}{2} = \frac{\Gamma(x)}{2}$$

$$\Rightarrow \Gamma(x) = 2\int_0^\infty t^{2x-1}e^{-t^2}dt$$

bulunur.

Örnek 6.4 $\int_0^\infty x^5 e^{-x^2}dx = ?$

Çözüm 6.4 (6.8) eşitliğinde $m = 5$, $\alpha = 1$, $n = 2$ yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\int_0^\infty x^5 e^{-x^2}dx = \frac{\Gamma(3)}{2} = \frac{2!}{2} = 1$$

bulunur.

Örnek 6.5 $\Psi(x) = Nx^2e^{-\beta x^2}$, $\beta > 0$, $-\infty \leq x \leq \infty$ şeklinde verilen dalga fonksiyonunu normlayın. $N = ?$

Çözüm 6.5 Normlamak; $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1$ yapan N sayısını bulmak demektir. $\Psi(x)$ fonksiyonu yerine yazılırsa

$$N^2\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-2\beta x^2}dx = 2N^2\int_0^\infty x^4e^{-2\beta x^2}dx = 1$$

elde edilir. Bu integral (6.8) ile karşılaştırıldığında $m = 4$, $n = 2$ ve $\alpha = 2\beta$ olduğu anlaşılır. Buna göre söz konusu integral, Gama fonksiyonu cinsinden

$$N^2\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{[2\beta]^{\frac{5}{2}}} = 1$$

olarak elde edilir. $\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$ değeri yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$N = 4\sqrt{\frac{\sqrt{2}\beta^{5/2}}{3.\sqrt{\pi}}}$$

bulunur. Normlanmış dalga fonksiyonu

$$\Psi(x) = 4\sqrt{\frac{\sqrt{2}\beta^{5/2}}{3.\sqrt{\pi}}}x^2e^{-\beta x^2}$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 6.6 $\int_0^1 \left[ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{x-1}dt$ integralini Gama integrali cinsinden bulunuz.

Çözüm 6.6 $\frac{1}{t} = e^u$ denirse

$$\frac{1}{t} = e^u \Rightarrow ln\left(\frac{1}{t}\right) = u$$

$$t^{-1} = e^u \Rightarrow -\frac{1}{t^2}dt = e^u du$$

$$-e^{2u}dt = e^u du \Rightarrow dt = -e^{-u}du$$

elde edilir. İntegral sınırları $t = 0$ için $u = \infty$ ve $t = 1$ için $u = 0$ olur. Bu ifadeler yerine yazılırsa

$$\int_0^1 \left[ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{x-1} dt = -\int_\infty^0 u^{x-1}e^{-u}du = \int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}du = \Gamma(x)$$

bulunur.■

6.2 Beta Fonksiyonu

Beta fonksiyonu integral biçiminde

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \qquad (6.9)$$

şeklinde tanımlanır. Beta fonksiyonu x ve y gibi iki argümana sahiptir. Beta fonksiyonu ile özellikle, Legendre polinomlarını içeren integrallerde karşılaşırız. Beta fonksiyonunda argümanlar yer değiştirirse

$$B(x,y) = B(y,x) \qquad (6.10)$$

sonuç değişmez.

İspat: $t = 1 - u$ diyelim. Buna göre

$$t = 1 - u \Rightarrow dt = -du,\ 1 - t = u$$

olur. Sınırlar $t = 0$ için $u = 1$ ve $t = 1$ için $u = 0$ şeklindedir. Bunlar yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = -\int_1^0 (1-u)^{x-1}\, u^{y-1}du \\ &= \int_0^1 u^{y-1}\,(1-u)^{x-1}\,du = B(y,x) \end{aligned}$$

bulunur. Beta integralinin üst sınırını keyfi bir a değerine genişletmek için $u = at$ dönüşümü yapmak yeterli olur. Bu durumda

$$u = at \Rightarrow t = \frac{u}{a} \Rightarrow dt = \frac{du}{a}$$

olur. İntegral sınırları $t = 0$ için $u = 0$ ve $t = 1$ için $u = a$ şeklindedir. Bu ifadeler yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \int_0^a \left(\frac{u}{a}\right)^{x-1} (1-\frac{u}{a})^{y-1} \left(\frac{du}{a}\right) = \int_0^a \left(\frac{u}{a}\right)^{x-1} \left(\frac{a-u}{a}\right)^{y-1} \left(\frac{du}{a}\right) \\ &= \frac{1}{a^{x+y-1}} \int_0^a u^{x-1}(a-u)^{y-1} du \qquad (6.11) \end{aligned}$$

bulunur. Beta fonksiyonunun sıkça kullanılan trigometrik biçimini elde etmek için $t = Sin^2\theta$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} t &= Sin^2\theta \Rightarrow 1 - t = 1 - Sin^2\theta = Cos^2\theta \\ dt &= 2Sin\theta Cos\theta d\theta \end{aligned}$$

bulunur. Yeni sınırlar $t = 0$ için $\theta = 0$ ve $t = 1$ için $\theta = \pi/2$ olur. Buna göre Beta fonksiyonu

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \left[Sin^2\theta\right]^{x-1} \left[Cos^2\theta\right]^{y-1} Sin\theta Cos\theta d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \left[Sin\theta\right]^{2x-1} \left[Cos\theta\right]^{2y-1} d\theta \qquad (6.12) \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. $B(x,y)$ fonksiyonu $\Gamma(x)$ ve $\Gamma(y)$ fonksiyonları cinsinden

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad (6.13)$$

olarak yazılabilir.

İspat: Örnek 6.3'te

$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty t^{2x-1} e^{-t^2} dt$$

olarak bulunmuştu. $x \to y$ ve $t \to s$ değişimi yapılırsa, $\Gamma(y)$ için

$$\Gamma(y) = 2\int_0^\infty s^{2y-1}e^{-s^2}ds$$

yazılabilir. $\Gamma(x)$ ve $\Gamma(y)$ taraf tarafa çarpılırsa

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty t^{2x-1}s^{2y-1}e^{-(t^2+s^2)}dtds$$

bulunur. Bu, t ve s koordinatlarında yüzey integralidir. Bu durumda $dtds = dA$ yüzey elemanıdır. t ve s değişkenleri kutupsal koordinatlarda

$$\begin{aligned} t &= rCos\theta, \quad s = rSin\theta \Rightarrow t^2 + s^2 = r^2 \\ dA &= dtds = rdrd\theta \end{aligned}$$

şeklinde alınırsa, $\Gamma(x)\Gamma(y)$ çarpımı için

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= 4\int_0^\infty\int_0^{\pi/2} [rCos\theta]^{2x-1}[rSin\theta]^{2y-1}e^{-r^2}rdrd\theta \\ &= \underbrace{\left(2\int_0^\infty r^{2x+2y-1}e^{-r^2}dr\right)}_{\Gamma(x+y)} \times \underbrace{\left(2\int_0^{\pi/2}[Cos\theta]^{2x-1}[Sin\theta]^{2y-1}d\theta\right)}_{B(x,y)} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $B(x,y)$ yalnız bırakılırsa

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

elde edilir.

Örnek 6.7 Beta fonksiyonunun $B(x,y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt$ şeklinde yazılabileceğini gösterin.

Çözüm 6.7 $B(x,y)$ fonksiyonunda yerine yazılmak üzere $t = \frac{u}{1+u}$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} t &= \frac{u}{1+u} \Rightarrow dt = \frac{1}{(1+u)^2}du \\ 1-t &= \frac{1}{1+u}, \; t=0 \text{ için } u=0, \; t=1 \text{ için } u=\infty \end{aligned}$$

olur. u değişkeni cinsinden $B(x,y)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \\ &= -\int_0^{\infty}\left[\frac{u}{1+u}\right]^{x-1}\left[\frac{1}{1+u}\right]^{y-1}\frac{1}{(1+u)^2}du = \int_0^{\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du \end{aligned}$$

olur. Son ifadede u yerine t yazılırsa

$$B(x,y) = \int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt \tag{6.14}$$

elde edilir.

Örnek 6.8 $I = \int_0^{\infty}\frac{t^4}{(1+t)^7}dt$ integralini hesaplayın.

Çözüm 6.8 I integrali (6.14) ile verilen Beta fonksiyonu ile karşılaştırıldığında, $x-1=4 \Rightarrow x=5$ ve $x+y=7 \Rightarrow y=2$ olduğu anlaşılır. Buna göre

$$I = \int_0^{\infty}\frac{t^4}{(1+t)^7}dt = B(5,2) = \frac{\Gamma(5)\Gamma(2)}{\Gamma(7)} = \frac{4!.1!}{6!} = \frac{1}{30}$$

olarak bulunur.

Örnek 6.9 $I = \int_0^{\pi/2} Sin^5\theta Cos^3\theta d\theta$ integralini Beta fonksiyonunu kullanarak hesaplayın.

Çözüm 6.9 I integrali (6.12) ile verilen Beta fonksiyonu ile karşılaştırıldığında, $2x-1=5 \Rightarrow x=3$ ve $2y-1=3 \Rightarrow y=2$ olduğu anlaşılır. Buna göre

$$I = \frac{B(3,2)}{2} = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(3)\Gamma(2)}{\Gamma(5)} = \frac{1}{2}\frac{2!.1!}{4!} = \frac{1}{24}$$

bulunur.

Örnek 6.10 $\int_0^{\pi/2} Sin^n\theta d\theta$ integralini Gama fonksiyonu cinsinden yazın.

Çözüm 6.10 $Sin^2\theta = u$ denirse

$$\begin{aligned} Sin^2\theta &= u \Rightarrow Sin\theta = \sqrt{u},\ Cos\theta = \sqrt{1-u} \\ 2Sin\theta Cos\theta d\theta &= du \Rightarrow d\theta = \frac{du}{2Sin\theta Cos\theta} = \frac{du}{2.\sqrt{u}\sqrt{1-u}} \\ \theta &= 0 \text{ için } u=0,\ \theta=\pi/2 \text{ için } u=1 \end{aligned}$$

ifadeleri kullanılırsa

$$\int_0^{\pi/2} Sin^n\theta d\theta = \int_0^1 \frac{u^{n/2}du}{2\sqrt{u}\sqrt{1-u}} = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{(n-1)/2}(1-u)^{-1/2}du$$

integrali elde edilir. Bu integral (6.9) ile karşılaştırıldığında $x-1=(n-1)/2 \Rightarrow x=(n+1)/2$ ve $y-1=-1/2 \Rightarrow y=1/2$ olduğu anlaşılır. Bu göre

$$\int_0^{\pi/2} Sin^n\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{(n-1)/2}(1-u)^{-1/2}du = \frac{B(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2})}{2}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

olur.■

6.3 Hata Fonksiyonu

Bir boyutlu harmonik osilatör ve olasılık teoride karşılaşılan hata fonksiyonu,

$$Erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt \tag{6.15}$$

biçiminde tanımlanan bir integraldir. Burada z, $0 \le z \le \infty$ aralığında değer alabilir. Eğer (6.15) integrali $z=\infty$ için hesaplanırsa

$$Erf(z=\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt = 1$$

bulunur. Burada $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ sonucu kullanıldı. Bu, e^{-t^2} Gaussiyen fonksiyonunun normlandığı, yani fonksiyonun altında kalan alanın 1 olduğu anlamına geliyor. Eğer z değeri sonsuza kadar uzatılmazsa, bu alan bir miktar eksik hesaplanmış olur. Diğer bir ifade ile integralin belli bir kısmı hesaplanmıştır. Örneğin, $z=1$ için $Erf(1)$ nümerik olarak hesaplanırsa

$$Erf(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 e^{-t^2}dt \simeq 0.84$$

bulunur. Bu, söz konusu alanın %84'ünün hesaplandığını göstermektedir. Hata fonksiyonunun bazı değerleri Tablo 6.1'de verilmiştir:

Tablo 6.1 Hata fonksiyonunun bazı değerleri

z	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	2.0	3.0
$Erf(z)$	0.2227	0.4284	0.6039	0.7421	0.8427	0.9953	0.9999

Hata fonksiyonu $[0,1]$ aralığında değer aldığından, Kuantum mekaniğinde bulunma olasılığını hesaplamak için uygundur. Diğer yandan negatif argümanlı hata fonksiyonu için

$$Erf(-z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-z} e^{-t^2} dt = -Erf(z) \tag{6.16}$$

yazılabilir. Bir diğer hata fonksiyonu

$$Erfc(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt = 1 - Erf(z) \tag{6.17}$$

şeklinde tanımlanan tamamlayıcı hata fonksiyonudur. Bu fonksiyon hesaplanan alanı değil, eksik kalanı belirtir. Örneğin, $Erfc(1)$

$$Erfc(1) = 1 - Erf(1) = 1 - 0.8427 = 0.1573$$

olur.

Örnek 6.11 Bir boyutlu harmonik osilatörün normlanmış taban durum dalga fonksiyonu

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}, \; \alpha > 0$$

şeklindedir. Osilatörün $[-L, L]$ aralığında bulunma olasılığını bulun.

Çözüm 6.11 Osilatörün $[-L, L]$ aralığında bulunma olasılığı

$$\int_{-L}^{L} |\psi_0(x)|^2 dx = \int_{-L}^{L} \left[\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}\right]^2 dx = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_0^{L} e^{-\alpha^2 x^2} dx$$

olarak yazılabilir. $\alpha x = t$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} \alpha x &= t \\ &\Rightarrow \alpha^2 x^2 = t^2, \; dx = \frac{dt}{\alpha} \end{aligned}$$

olur. Bu ifadeler yerine yazılırsa

$$\int_{-L}^{L} |\psi_0(x)|^2 dx = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}\alpha} \int_0^{L} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{L} e^{-t^2} dt = Erf(L)$$

olarak bulunur.■

6.4 Ortogonal Polinomlara Genel Bir Bakış

Bu kesimde, ortogonal polinomların bir takım ortak özelliklerini vereceğiz. Genel olarak n. dereceden bir $f_n(x)$ polinomu

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} k_i x^i = k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + ... + k_1 x + k_0 \tag{6.18}$$

şeklindedir. $f_n(x)$ polinom ailesinin $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonu ile çarpımının $a \leq x \leq b$ aralığındaki integrali

$$\int_a^b f_m(x) f_n(x) \omega(x) dx = 0, \; m \neq n = 0, 1, 2, ... \tag{6.19}$$

şartını sağlıyorsa $f_n(x)$ polinomlarına ortogonal polinomlar denir. Burada $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonu, a ve b sınırında integralin sonlu kalmasını garantiler. Ortogonal polinomlar için normlama bağıntısı

$$\int_a^b \omega(x) f_n^2(x) dx = h_n, \; n = 0, 1, 2, ... \tag{6.20}$$

biçimindedir. Ortogonal polinomlar ile ilgili bazı ortak özellikleri vermek yaralı olacaktır:

1. Sağladığı diferansiyel denklem: Ortogonal polinomlar

$$g_2(x) f''(x) + g_1(x) f'(x) + g_0 f(x) = 0 \tag{6.21}$$

biçimindeki ikinci mertebeden bir diferansiyel denklemi sağlarlar. Burada $g_1(x)$ ve $g_2(x)$, n'den bağımsız fonksiyonlar iken, g_0 sadece n sayısına bağlı bir sabittir.

2. Tekrarlama bağıntısı: Ortogonal polinomlar

$$a_n f_{n+1} = (b_n + c_n x) f_n + d_n f_{n-1} \tag{6.22}$$

şeklindeki tekrarlama bağıntısını sağlarlar. Burada a_n, b_n, c_n, d_n sabitlerdir.

3. Rodriguez Formülü: n. dereceden ortogonal polinomlar

$$f_n(x) = \frac{1}{e_n \, \omega(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\omega(x) g^n(x)] \tag{6.23}$$

n. mertebeden türev yardımı ile bulunabilir. Burada e_n, n'e bağlı bir sabit, $g(x)$ ise n'den bağımsız bir fonksiyondur.

4. Türev Özelliği: n. dereceden ortogonal bir polinomun türevi için

$$g_2(x) \frac{d}{dx} f_n = g_1(x) f_n + g_0 f_{n-1} \tag{6.24}$$

eşitliği yazılabilir. Buradaki $g_2(x)$, $g_1(x)$ ve g_0 fonksiyonları (6.21) eşitliğinde verilenlerle aynı olmak zorunda değildir. Genel özelliklerden sonra, fizikte sıklıkla kullanılan polinomlardan bazılarını detaylarıyla ele alabiliriz.

6.5 Hermite Polinomları

$-\infty \leq x \leq +\infty$ aralığında tanımlı olan ve $H_n(x)$ ile gösterilen Hermite polinomları ile kuantum mekaniğinde bir boyutlu harmonik osilatör problemini çözerken karşılaşılır. Hermite polinomları için üretici fonksiyon

$$G(x,t) = e^{-t^2+2xt} \tag{6.25}$$

şeklindedir. İki argümanlı $G(x,t)$ fonksiyonunun t'ye göre Taylor seri açılımı

$$\begin{aligned} G(x,t) &= G(x,0)\frac{t^0}{0!} + \frac{\partial}{\partial t}G(x,t)\bigg|_{t=0}\frac{t}{1!} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}G(x,t)\bigg|_{t=0}\frac{t^2}{2!} \\ &+ .... + \frac{\partial^n}{\partial t^n}G(x,t)\bigg|_{t=0}\frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

şeklindedir. Kısmi türevler alınırsa

$$G(x,t)|_{t=0} = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial t}G(x,t)\bigg|_{t=0} = 2(x-t)\,e^{-t^2+2xt}\bigg|_{t=0} = 2x$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}G(x,t)\bigg|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t}\left[2(x-t)\,e^{-t^2+2xt}\right]\bigg|_{t=0} \\ &= -2e^{-t^2+2xt} + 4(x-t)^2\,e^{-t^2+2xt}\bigg|_{t=0} = 4x^2-2 \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre seri

$$G(x,t) = \underbrace{1}_{H_0(x)}\frac{t^0}{0!} + \underbrace{2x}_{H_1(x)}\frac{t}{1!} + \underbrace{(4x^2-2)}_{H_2(x)}\frac{t^2}{2!} + ... + \underbrace{\frac{\partial^n}{\partial t^n}G(x,t)\bigg|_{t=0}}_{H_n(x)}\frac{t^n}{n!}$$

biçiminde olur. $\frac{t^n}{n!}$ 'in x'e bağlı katsayıları $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$,..., $H_n(x)$ Hermite polinomlarıdır. n indisi polinomun derecesini ifade etmek amacıyla kullanılmıştır. n. dereceden Hermite polinomunu elde etmek için, $G(x,t)$ üretici fonksiyonunun t'ye göre n. merteben kısmi türevini alındıktan sonra t yerine 0 yazılması yeterli olacaktır:

$$H_n(x) = \frac{\partial^n}{\partial t^n}G(x,t)\bigg|_{t=0} \tag{6.26}$$

Sonuç olarak, $G(x,t)$ fonksiyonunun seri açılımı

$$G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!} \tag{6.27}$$

şeklinde yazılabilir. (6.26) yardımı ile $n=5$'e kadar elde edilen Hermite polinomları Tablo 6.2'de verilmiştir:

Tablo 6.2 Bazı Hermite Polinomları

n	$H_n(x)$
0	$H_0(x)=1$
1	$H_1(x)=2x$
2	$H_2(x)=4x^2-2$
3	$H_3(x)=8x^3-12x$
4	$H_4(x)=16x^4-48x^2+12$
5	$H_4(x)=32x^5-160x^3+120x$

Tablo 6.2'den görülebileceği gibi Hermite polinomları n çift ise çift, n tek ise tektir. Bu durum genel olarak

$$H_n(-x)=(-1)^n H_n(x) \tag{6.28}$$

biçiminde yazılabilir. $-\infty\leq x\leq+\infty$ aralığında tanımlı Hermite polinomları için ağırlık fonksiyonu $\omega(x)=e^{-x^2}$ ile verilir. Ağırlık fonksiyonu, $x\to\mp\infty$ için $\omega(x)H_n(x)$ çarpımının sonlu kalmasını sağlar. Hermite polinomlarını elde etmenin diğer bir yolu, ağırlık fonksiyonunun x'e göre uygun mertebeden türevlerini alıp e^{x^2} ile çarpmaktır. $n=1$ ve $n=2$ için işlem yapılırsa

$$n=1\ \Rightarrow e^{x^2}\frac{d}{dx}e^{-x^2}=e^{x^2}\left(-2xe^{-x^2}\right)=-2x=-H_1(x)$$

$$\begin{aligned} n &= 2\Rightarrow e^{x^2}\frac{d^2}{dx^2}e^{-x^2}=e^{x^2}\frac{d}{dx}\left(-2xe^{-x^2}\right)=e^{x^2}\left[-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}\right] \\ &= e^{x^2}\left[-2+4x^2\right]e^{-x^2}=4x^2-2=H_2(x) \end{aligned}$$

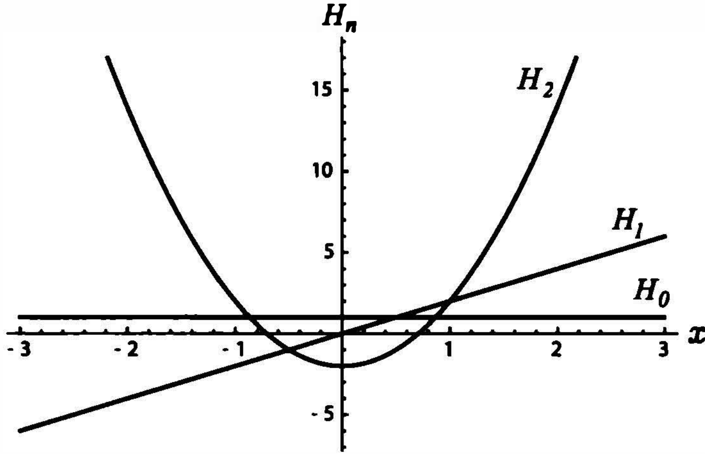
bulunur. Böyle devam edilirse $H_n(x)$ için

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) \tag{6.29}$$

ifadesi bulunur. Bu, Hermite polinomları için Rodriguez formülünden başka bir şey değildir. (6.29) ifadesi (6.23) ile karşılaştırılırsa, Hermite polinomları için $\frac{1}{e_n}=(-1)^n$ ve $g(x)=1$ olduğu görülür.

Örnek 6.12.a) $-3 \leq x \leq 3$ aralığında $H_0(x)$, $H_1(x)$ ve $H_2(x)$ polinomlarının x'e bağlı grafikleri çizin. **b)** Bu kez aynı polinomları $\omega(x)$ ile çarparak ağırlıklı grafiklerini çizin.

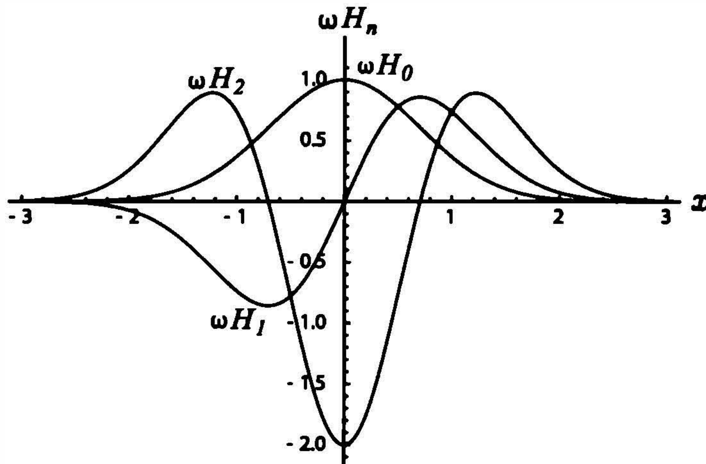
Çözüm 6.12.a) $H_0(x)$, $H_1(x)$ ve $H_2(x)$ polinomlarının $-3 \leq x \leq 3$ aralığındaki grafikleri Şekil 6.2'de verilmiştir.



Şekil 6.2 H_0, H_1 ve H_2 polinomlarının x'e göre değişimi

Şekil 6.2 incelendiğinde, dereceleriyle uyumlu olarak $H_0(x)$'ın x eksenini kesmediği, $H_1(x)$'in bir kez ve $H_2(x)$'in ise iki kez kestiği görülmektedir.

b) Aynı polinomların $\omega(x) = e^{-x^2}$ ağırlık fonksiyonu ile çarpımının grafiği Şekil 6.3'te verilmiştir.



Şekil 6.3 Ağırlıklı H_0, H_1 ve H_2 polinomlarının x'e göre değişimi

Şekil 6.3'e bakıldığında, ağırlık fonksiyonunun x'in artan değerlerinde polinomların alacağı değerleri hızlıca azalttığı görülmektedir.■

$G(x,t)$ fonksiyonunun t'ye göre kısmi türevi ile kendisi arasında

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}G(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}e^{-t^2+2xt} = -2(t-x)\underbrace{e^{-t^2+2xt}}_{G(x,t)} \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}G(x,t) + 2(t-x)G(x,t) = 0 \end{aligned} \tag{6.30}$$

ilişkisi vardır. Diğer yandan (6.27) ile verilen $G(x,t)$ ifadesinin t'ye göre kısmi türevi alınırsa(n yerine m yazarak)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}G(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\sum_{m=0}^{\infty}H_m(x)\frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty}H_m(x)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t^m}{m!}\right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}H_m(x)\frac{m}{m!}t^{m-1} = \sum_{m=1}^{\infty}H_m(x)\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\end{aligned} \tag{6.31}$$

bulunur. Burada türev alındıktan sonra indisin $m = 1$'den başladığına dikkat edin. (6.27) ve (6.31), (6.30) 'da yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}H_m(x)\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + 2(t-x)\sum_{m=0}^{\infty}H_m(x)\frac{t^m}{m!} &= 0 \\ \sum_{m=1}^{\infty}H_m(x)\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + 2t\sum_{m=0}^{\infty}H_m(x)\frac{t^m}{m!} - 2x\sum_{m=0}^{\infty}H_m(x)\frac{t^m}{m!} &= 0\end{aligned}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}H_m(x)\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + 2\sum_{m=0}^{\infty}H_m(x)\frac{t^{m+1}}{m!} - 2x\sum_{m=0}^{\infty}H_m(x)\frac{t^m}{m!} = 0$$

elde edilir. Her üç terimi $\frac{t^n}{n!}$ ortak çarpanında yazmak istersek, birinci terimde $m-1=n$, ikinci terimde $m+1=n$ ve üçümcü terimde $m=n$ yazılması gerekir. Diğer bir deyişle birinci terimde m yerine $n+1$, ikinci terimde m yerine $n-1$ ve üçüncü terimde m yerine n yazılmalıdır. Bu değişiklikler yapılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}H_{n+1}(x)\frac{t^n}{n!} + 2\sum_{n=1}^{\infty}H_{n-1}(x)\frac{t^n}{(n-1)!} - 2x\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!} = 0$$

elde edilir. İkinci terim n ile bir kere çarpılıp bir kere bölünür ve $n(n-1)! = n!$ kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}H_{n+1}(x)\frac{t^n}{n!} + 2n\sum_{n=1}^{\infty}H_{n-1}(x)\frac{t^n}{n!} - 2x\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!} = 0$$

bulunur. Bu eşitlik $n \geq 1$ değerleri için $\frac{t^n}{n!}$ ortak çarpanına alınabilir. Buradan, Hermite polinomları için

$$H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1} = 0,\ n \geq 1 \tag{6.32}$$

tekrarlama bağıntısı elde edilir. (6.32) ifadesi (6.22) ifadesiyle karşılaştırıldığında, Hermite polinomları için

$$a_n = 1,\ b_n = 0,\ c_n = 2,\ d_n = -2n$$

olduğu görülür.

Bu kez $G(x,t)$ fonksiyonunun x'ye göre kısmi türevi ile kendisi arasındaki bağıntıyı bulmak için işlem yapılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}G(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x}e^{-t^2+2xt} = 2t\underbrace{e^{-t^2+2xt}}_{G(x,t)} \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}G(x,t) = 2tG(x,t) \end{aligned} \tag{6.33}$$

bulunur. (6.27) ile verilen $G(x,t)$ ifadesi (6.33)'te yerine yazılır(n yerine m indisi kullanarak) ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{\partial}{\partial x}\sum_{m=0}^{\infty} H_m(x)\frac{t^m}{m!} = 2t\sum_{m=0}^{\infty} H_m(x)\frac{t^m}{m!}$$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!}\frac{d}{dx}H_m(x) = 2\sum_{m=0}^{\infty} H_m(x)\frac{t^{m+1}}{m!}$$

olur. Bu eşitliğin iki tarafı $\frac{t^n}{n!}$ çarpanına sahip olması istenirse, eşitliğin sol tarafında $m = n$ ve sağ tarafında ise $m + 1 = n$ yazılmalıdır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{d}{dx}H_n(x) &= 2\sum_{n=1}^{\infty}H_{n-1}(x)\frac{t^n}{(n-1)!} \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}H_{n-1}(x)\frac{nt^n}{n!} \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliğin her $n \geq 1$ için sağlanması

$$\frac{d}{dx}H_n(x) = H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \tag{6.34}$$

olmasıyla mümkündür. Bu türev bağıntısı olarak bilinir. (6.34) eşitliği (6.24) ile karşılaştırıldığında, Hermite polinomları için

$$g_2(x) = 1,\ g_1(x) = 0 \text{ ve } g_0 = 2n$$

olduğu anlaşılır.

Hermite polinomlarının sağladığı diferansiyel denklemi elde etmek için, (6.32) ile verilen tekrarlama bağıntısının türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} H_{n+1} &= \frac{d}{dx}\left[2xH_n - 2nH_{n-1}\right] \\ H'_{n+1} &= 2H_n + 2xH'_n - 2nH'_{n-1} \end{aligned} \tag{6.35}$$

elde edilir. Diğer yandan (6.34) ile verilen ifadenin ikinci türevi

$$\begin{aligned} H''_n(x) &= 2nH'_{n-1}(x) \\ &\Rightarrow 2nH'_{n-1} = H''_n \end{aligned}$$

olur. Yine (6.34)'te n yerine $n+1$ yazılırsa

$$H'_{n+1} = 2(n+1)H_n$$

bulunur. Bu sonuçlar (6.35)'te yerine konulursa

$$2(n+1)H_n = 2H_n + 2xH'_n - H''_n$$

elde edilir. $2H_n$ terimleri sadeleştirilir ve türevin mertebesine göre düzenlenirse, Hermite diferansiyel denklemi

$$H''_n - 2xH'_n + 2nH_n = 0 \tag{6.36}$$

olarak bulunur. (6.21) ile karşılaştırıldığında

$$g_2(x) = 1,\ g_1(x) = -2x \text{ ve } g_0 = 2n$$

olduğu anlaşılır.

Şimdi Hermite polinomlarının ortogonal olduklarını gösterip onları normlamak istiyoruz. Bunun için Hermite diferansiyel denkleminin e^{-x^2} ile çarpımını göz önüne alalım.

$$e^{-x^2}H''_n - 2xe^{-x^2}H'_n + 2ne^{-x^2}H_n = 0$$

Bu denklemi

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}H'_n\right] + 2ne^{-x^2}H_n = 0$$

şeklinde yazmak mümkündür. $m \neq n$ olmak üzere, bu denklemi H_m ile çarpımının $[-\infty, +\infty]$ aralığında integrali

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(H_m \frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}H'_n\right] + 2ne^{-x^2}H_m H_n\right) dx &= 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} H_m \frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}H'_n\right] dx + 2n\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}H_m H_n dx &= 0 \end{aligned}$$

olur. Buradaki ilk integrali kısmi integral yöntemi ile hesaplamak üzere, u ve v

$$\begin{aligned} u &= H_m \Rightarrow du = H'_m dx \\ dv &= d\left[e^{-x^2} H'_n\right] \Rightarrow v = e^{-x^2} H'_n \end{aligned}$$

şeklinde alınırsa

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m \frac{d}{dx}\left[e^{-x^2} H'_n\right] dx &= uv - \int v du \\ &= e^{-x^2} H_m H'_n \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H'_n H'_m dx \end{aligned}$$

elde edilir. Birinci terim e^{-x^2} çarpanından dolayı 0 olur. Geriye ikinci terim kalır. Buna göre

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H'_n H'_m dx + 2n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m H_n dx = 0$$

integral ifadesi elde edilir. $m \Leftrightarrow n$ değişikliği yapılırsa, yani n yerine m, m yerine n yazılırsa eşitlik bozulmaz:

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H'_m H'_n dx + 2m \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n H_m dx = 0$$

Bu iki eşitlik taraf tarafa çıkarılırsa

$$2(n-m) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n H_m dx = 0$$

bulunur. Burada $m \neq n$ olduğundan, eşitliğin sağlanması için integralin sıfır olması gerektiği açıktır.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n H_m dx = 0, \; n \neq m, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (6.37)$$

Böylece, Hermite polinomlarının dikliği ispatlanmış oldu. Hermite polinomlarının normunu elde etmek üzere $G(x,t)$ ve $G(x,s)$ üretici fonksiyonlarının çarpımını göz önüne alalım:

$$G(x,t)G(x,s) = e^{-t^2+2xt} e^{-s^2+2xs} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} H_m(x) \frac{s^m}{m!}$$

Bu eşitliğin her iki tarafı e^{-x^2} ile çarpılır ve $[-\infty, +\infty]$ aralığında integrali alınırsa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-t^2-s^2+2xt+2xs}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{s^m}{m!}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx$$

ifadesi elde edilir. $-x^2-t^2-s^2+2xt+2xs = -(x-t-s)^2+2ts$ şeklinde yazılır ve $u = x-t-s$ denirse, sol taraf

$$e^{2ts}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du}_{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\pi}e^{2ts}$$

bulunur. Sağ taraftaki integral $I_{nm} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx$ ile gösterilirse, $m \neq n$ için $I_{nm} = 0$'dır. $m = n$ durumu için

$$\sqrt{\pi}e^{2ts} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{s^n}{n!}I_{nn}$$

elde edilir. Sol tarafı sağ taraf gibi bir toplam olarak yazmak için, e^{2ts} ifadesini seriye açmak uygun olur. $q = ts$ denirse

$$e^{2q} = \sum_{n=0}^{\infty}1+2q++4\frac{q^2}{2!}+8\frac{q^3}{3!}+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^nq^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\,(ts)^n}{n!}$$

olur. Bu seri ifadesi yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa, I_{nn} integrali

$$\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\,(ts)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{s^n}{n!}I_{nn}$$

$$\Rightarrow I_{nn} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}H_n^2(x)dx = \sqrt{\pi}2^n n! \qquad (6.38)$$

olarak bulunur. Bu Hermite polinomlarının normlanma şartıdır ve (6.20) ifadesindeki h_n değerine karşılık gelmektedir.

Örnek 6.13 Bir boyutlu harmonik osilatör için

$$\langle x\rangle_{nm} = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}H_n(x)H_m(x)dx$$

ile verilen geçiş olasılığını hesaplayın.

Çözüm 6.13 (6.32) ile verilen tekrarlama bağıntısından xH_n ifadesi yalnız bırakılırsa

$$xH_n = \frac{1}{2}H_{n+1} - nH_{n-1}$$

elde edilir. Bu $\langle x \rangle_{nm}$ integralinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\langle x \rangle_{nm} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\left(xH_n\right)H_m dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\left(\frac{1}{2}H_{n+1} - nH_{n-1}\right)H_m dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}H_{n+1}H_m dx - n\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}H_{n-1}H_m dx
\end{aligned}$$

olur. (6.38) yardımı ile birinci ve ikinci integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}H_{n+1}H_m dx = \begin{cases} \sqrt{\pi}2^{n+1}\left(n+1\right)!, \; m = n+1 \text{ ise} \\ 0, \; m \neq n+1 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}H_{n-1}H_m dx = \begin{cases} \sqrt{\pi}2^{n-1}\left(n-1\right)!, \; m = n-1 \text{ ise} \\ 0, \; m \neq n-1 \text{ ise} \end{cases}$$

bulunur. Tüm durumlar birleştirilirse

$$\langle x \rangle_{nm} = \begin{cases} \sqrt{\pi}2^{n-1}n!, \quad m = n-1 \text{ ise} \\ \sqrt{\pi}2^{n}\left(n+1\right)!, \quad m = n+1 \text{ ise} \\ 0, \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

elde edilir.■

6.6 Legendre Polinomları

$-1 \leq x \leq 1$ aralığında tanımlı olan Legendre polinomları $P_n(x)$ ile gösterilir. Yine üretici fonksiyonundan başlayarak ilgili bağıntıları elde etmeye çalışacağız. Legendre polinomları için üretici fonksiyon

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \left(1-2xt+t^2\right)^{-1/2}, \; |t| < 1 \tag{6.39}$$

biçimindedir. $G(x,t)$, $t = 0$ civarında Taylor serisine açılırsa

$$\begin{aligned}
G(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial t^n}G(x,t)\bigg|_{t=0}\frac{t^n}{n!} = 1 + x\frac{t}{1!} \\
&+ \left(3x^2-1\right)\frac{t^2}{2!} + \left(15x^3-9x\right)\frac{t^3}{3!} + \left(105x^4-90x^2+9\right)\frac{t^4}{4!} + \ldots
\end{aligned}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa, t^n'nin katsayıları

$$G(x,t) = \underbrace{1}_{P_0(x)} + \underbrace{x}_{P_1(x)} t + \underbrace{\frac{1}{2}(3x^2-1)}_{P_2(x)} t^2 + \underbrace{\frac{1}{2}(5x^3-3x)}_{P_3(x)} t^3 + \underbrace{\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)}_{P_4(x)} t^4 + \ldots$$

$P_n(x)$ Legendre polinomlarıdır. Üretici fonksiyonu, Legendre polinomları cinsinden

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n \tag{6.40}$$

olarak yazılabilir. Buna göre $P_n(x)$ polinomlarını bulmak için

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} G(x,t)\bigg|_{t=0} \tag{6.41}$$

işleminin yapılması yeterli olur. (6.41) yardımı ile $n = 5$'e kadar olan Legendre polinomları Tablo 6.3'te verilmiştir:

Tablo 6.3 Bazı Legendre Polinomları

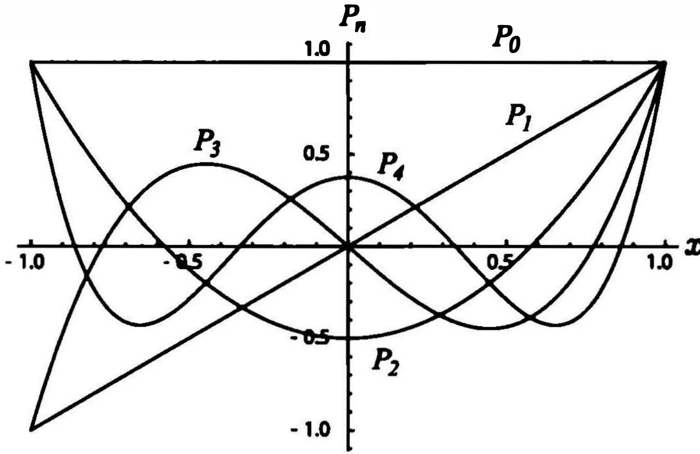
n	$P_n(x)$
0	$P_0(x) = 1$
1	$P_1(x) = x$
2	$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
3	$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
4	$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
5	$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

Tablo 6.3'e bakıldığında Legendre polinomlarının paritesinin

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \tag{6.42}$$

biçiminde olduğu görülür. Yani n çift ise çift, n tek ise tek paritelidir. $n = 4$'e kadar olan Legendre polinomlarının $-1 \leq x \leq 1$ aralığında x'e

bağlı grafiği Şekil 6.4'te verilmiştir.



Şekil 6.4 P_0, P_1, P_2, P_3 ve P_4 polinomlarının x'e göre değişimi

Legendre polinomları uç değerlerde $P_n(\mp 1) = (\mp 1)^n$ gibi zaten sonlu değerler aldığından, ağırlık fonksiyonu $\omega(x) = 1$ alınır. (6.23) ile verilen Rodriguez formülünde $\omega(x) = 1$, $g(x) = x^2 - 1$ yazılır ve $n = 1, 2, 3$ için işlem yapılırsa, Legendre polinomlarını veren e_1, e_2 ve e_3 sayıları

$$\begin{aligned} n &= 1 \Rightarrow P_1(x) = \frac{1}{e_1}\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right) = \frac{1}{e_1}2x \\ &= \frac{2}{e_1}P_1(x) \Rightarrow e_1 = 2 = 2^1 1! \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= 2 \Rightarrow P_2(x) = \frac{1}{e_2}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2-1\right)^2 = \frac{1}{e_2}\frac{d}{dx}\left[2\left(x^2-1\right)2x\right] \\ &= \frac{4}{e_2}\frac{d}{dx}\left(x^3-x\right) = \frac{4}{e_2}\left(3x^2-1\right) = \frac{8}{e_2}\left[\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)\right] \\ &= \frac{8}{e_2}P_2(x) \Rightarrow e_2 = 8 = 2^2 2! \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= 3 \Rightarrow P_3(x) = \frac{1}{e_3}\frac{d^3}{dx^3}\left(x^2-1\right)^3 = \frac{1}{e_3}\frac{d^2}{dx^2}\left[3\left(x^2-1\right)^2(2x)\right] \\ &= \frac{6}{e_3}\frac{d^2}{dx^2}\left[\left(x^2-1\right)^2 x\right] = \frac{6}{e_3}\frac{d}{dx}\left[2\left(x^2-1\right)2x^2 + \left(x^2-1\right)^2\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{6}{e_3}\frac{d}{dx}\left[4\left(x^4-x^2\right) + \left(x^2-1\right)^2\right] = \frac{6}{e_3}\left(16x^3 - 8x + 4x^3 - 4x\right) \\ &= \frac{6}{e_3}\left(20x^3 - 12x\right) = \frac{24}{e_3}\left(5x^3-3x\right) = \frac{48}{e_3}\left[\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)\right] \\ &= \frac{48}{e_3}P_3(x) \Rightarrow e_3 = 48 = 2^3 3! \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böyle devam edilirse $e_n = 2^n n!$ olduğu anlaşılır. Sonuç olarak $P_n(x)$ için Rodriguez formülü

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n \tag{6.43}$$

biçimindedir. $\frac{\partial}{\partial t}G(x,t)$ ile $G(x,t)$ arasında

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}G(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(1-2xt+t^2\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2}\left(1-2xt+t^2\right)^{-3/2}(2t-2x) \\
&= -\frac{(t-x)}{(1-2xt+t^2)}G(x,t) \\
&\Rightarrow \ (1-2xt+t^2)\frac{\partial}{\partial t}G(x,t) + (t-x)G(x,t) = 0
\end{aligned}$$

bağıntısı bulunur. (6.40) ile verilen $G(x,t)$'nin kısmi türevi($n \to m$ değişikliği yapılarak)

$$\frac{\partial}{\partial t}G(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)t^m = \sum_{m=1}^{\infty} P_m(x)mt^{m-1}$$

olur. Bu türev ifadesi yerine yazılırsa

$$(1-2xt+t^2)\sum_{m=1}^{\infty} P_m(x)mt^{m-1} + (t-x)\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)t^m = 0$$

elde edilir. Türev alınırken serinin $P_0(x)t^0$ şeklindeki sabit terimin türevinin sıfır olduğu ve toplamın 1'den başladığına dikkat edilmelidir. Çarpımlar dağıtılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{m=1}^{\infty} P_m(x)mt^{m-1} - 2xt\sum_{m=1}^{\infty} P_m(x)mt^{m-1} + t^2\sum_{m=1}^{\infty} P_m(x)mt^{m-1} \\
&\quad + t\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)t^m - x\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)t^m
\end{aligned}$$

bulunur. t çarpanları içeriye dahil edilirse

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{m=1}^{\infty} P_m(x)mt^{m-1} - 2x\sum_{m=1}^{\infty} P_m(x)mt^m + \sum_{m=1}^{\infty} P_m(x)mt^{m+1} \\
&\quad + \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)t^{m+1} - x\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)t^m
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliği t^n ortak çarpanında toplamak istersek; birinci terimde $m-1 = n (\Rightarrow m = n+1)$, ikinci ve beşinci terimlerde $m = n$, üçüncü

ve dördüncü terimlerde $m+1=n(\Rightarrow m=n-1)$ yazılmalıdır. Buna göre

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}(x)\,(n+1)\,t^n - 2x\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) n t^n + \sum_{n=2}^{\infty} P_{n-1}(x)(n-1)t^n \\ &+\sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(x)t^n - x\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \end{aligned}$$

olur. Bu ifadede toplamlar farklı indislerle başlamaktadır. Fakat tekrarlama bağıntısını bulmak için, $n \geq 2$ olan ortak terimleri göz önüne almak ve t^n 'nin katsayılarının toplamını sıfıra eşitlemek yeterlidir. Buna göre

$$(n+1)\,P_{n+1}(x) - 2nxP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x) + P_{n-1}(x) - xP_n(x) = 0$$

olur. Bu ifade düzenlenirse, Legendre polinomları için tekrarlama bağıntısı

$$(n+1)\,P_{n+1} - (2n+1)\,xP_n + nP_{n-1} = 0 \qquad (6.44)$$

olarak bulunur. Üretici fonksiyonun x'e göre kısmi türevi ile kendisi arasında

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}G(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(1-2xt+t^2\right)^{-1/2} = \frac{t}{(1-2xt+t^2)}G(x,t) \\ &\Rightarrow \quad (1-2xt+t^2)\frac{\partial}{\partial x}G(x,t) = tG(x,t) \end{aligned}$$

eşitliği vardır. (6.40) ile verilen $G(x,t)$ yerine yazılır($n \to m$) ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} (1-2xt+t^2)\frac{\partial}{\partial x}\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)t^m &= t\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)t^m \\ (1-2xt+t^2)\sum_{m=0}^{\infty} t^m \underbrace{\frac{d}{dx}P_m(x)}_{P_m'(x)} &= \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)t^{m+1} \end{aligned}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} t^m P_m'(x) - 2x\sum_{m=0}^{\infty} t^{m+1}P_m'(x) + \sum_{m=0}^{\infty} t^{m+2}P_m'(x) - \sum_{m=0}^{\infty} t^{m+1}P_m(x) = 0$$

bulunur. Bu eşitliği bu kez t^{n+1} ortak çarpanında toplamak istersek; birinci terimde $m=n+1(\Rightarrow n=m-1)$, ikinci ve dördüncü terimlerde $m=n$, üçüncü terimde $m+1=n(\Rightarrow m=n-1)$ yazılmalıdır. Buna göre

$$\sum_{n=-1}^{\infty} t^{n+1}P_{n+1}'(x) - 2x\sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1}P_n'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} t^{n+1}P_{n-1}'(x) - \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1}P_n(x) = 0$$

elde edilir. Yine, $n \geq 1$ için tüm terimler t^{n+1} 'nin ortak parantezinde toplanırsa

$$P_{n+1}' + P_{n-1}' = 2xP_n' + P_n,\ n \geq 1 \qquad (6.45)$$

türev bağıntısı bulunur. Bu ifadeyi biraz daha sade hale getirmek mümkündür. Örneğin (6.44) ile verilen tekrarlama bağıntısının x'e göre türevi alınır, 2 ile çarpılır ve düzenlenirse

$$2\,(n+1)\,P'_{n+1} + 2nP'_{n-1} = 2\,(2n+1)\,P_n + (2n+1)\,2xP'_n \qquad (6.46)$$

bulunur. Diğer yandan (6.45) ifadesi $(2n+1)$ ile çarpılırsa

$$(2n+1)P'_{n+1} + (2n+1)P'_{n-1} = (2n+1)2xP'_n + (2n+1)P_n = 0 \qquad (6.47)$$

elde edilir. (6.46)'dan (6.47)'i çıkarılırsa, P'_n terimleri sadeleşir ve

$$P'_{n+1} - P'_{n-1} = (2n+1)P_n \qquad (6.48)$$

bulunur. Legendre polinomları için, bir dizi türev bağıntısı elde etmek mümkündür. Örneğin;

$$xP'_n = P'_{n-1} + nP_n \qquad (6.49)$$

$$\left(1-x^2\right)P'_n = nP_{n-1} - nxP_n \qquad (6.50)$$

bunlardan ikisidir. Legendre diferansiyel denklemini bulmak için (6.50) kullanılabilir. (6.50) ile verilen ifadenin x'e göre türevi alınırsa

$$\left(1-x^2\right)P''_n - 2xP'_n = nP'_{n-1} - nxP'_n - nP_n$$

elde edilir. Burada P'_{n-1} yerine (6.49) ile verilen özdeşi konulur ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}\left(1-x^2\right)P''_n - 2xP'_n &= n\left(-nP_n + xP'_n\right) - nxP'_n - nP_n \\ \left(1-x^2\right)P''_n - 2xP'_n &= -n^2P_n + nxP'_n - nxP'_n - nP_n\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(1-x^2\right)P''_n - 2xP'_n + n(n+1)P_n = 0 \qquad (6.51)$$

Legendre diferansiyel denklemi bulunur. Bu diferansiyel denklemle hidrojen atomu için Schrödinger denklemini çözerken karşılaşırız. $x = Cos\theta$ ve $n \to \ell$ olarak alınırsa, Legendre diferansiyel denklemi

$$\frac{1}{Sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[Sin\theta\frac{d}{d\theta}P_\ell(Cos\theta)\right] + \ell(\ell+1)P_\ell(Cos\theta) = 0 \qquad (6.52)$$

biçimini alır. Burada θ küresel koordinatlarda z ekseni ile yapılan açı, $\ell = 0,1,2,..$ olabilen açısal momentum kuantum sayısıdır.

Şimdi, Legendre polinomlarının ortogonal olduklarını göstermek istiyoruz. Legendre diferansiyel denklemini biraz farklı yazarak başlayalım.

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P'_n\right] + n(n+1)P_n = 0$$

Bu denklemin P_m ile çarpımının, $[-1,1]$ aralığında integrali

$$\int_{-1}^{1} P_m \frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_n'\right]dx + n(n+1)\int_{-1}^{1} P_n P_m dx = 0$$

şeklinde yazılabilir. Birinci integral kısmi integral yöntemi ile çözülebilir. Bu amaç için

$$\begin{aligned} u &= P_m \Rightarrow du = P_m' dx \\ dv &= d\left[\left(1-x^2\right)P_n'\right] \Rightarrow v = \left(1-x^2\right)P_n' \end{aligned}$$

olarak alınırsa

$$\int_{-1}^{1} P_m \frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_n'\right]dx = uv - \int vdu$$

$$= \underbrace{\left(1-x^2\right)P_m P_n'\Big|_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)P_n' P_m' dx$$

olur. İlk terim, $\left(1-x^2\right)$'den olayı sıfır olur. Böylece

$$-\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)P_n' P_m' dx + n(n+1)\int_{-1}^{1} P_n P_m dx = 0$$

bulunur. Bu denklemde $m \Leftrightarrow n$ değişikliği yapılırsa eşitlik bozulmaz.

$$-\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)P_m' P_n' dx + m(m+1)\int_{-1}^{1} P_n P_m dx = 0$$

Bu iki integral denklem taraf tarafa çıkarılırsa, ilk terimler sadeleşir ve

$$[n(n+1) - m(m+1)]\int_{-1}^{1} P_n P_m dx = 0$$

bulunur. $m \neq n$ için $n(n+1) - m(m+1) \neq 0$ olacağından, eşitliğin sağlanması için

$$\int_{-1}^{1} P_n P_m dx = 0$$

olmalıdır. Bu, Legendre polinomlarının ortogonal olduklarını gösterir. Son olarak Legendre polinomlarını normlamak istiyoruz. (6.39) ve (6.40)'ın kareleri alındıktan sonra sağ tarafları eşitlenirse, $[-1,1]$ aralığında x'e göre integrali

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1-2xt+t^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx$$

şeklinde yazılabilir. $y = 1 - 2xt + t^2$ tanımlanırsa, $dy = -2tdx$ olur. Yeni sınırlar $x = -1$ için $y = (1+t)^2$ ve $x = 1$ için $y = (1-t)^2$ bulunur. Böylece eşitliğin sol tarafındaki integral

$$-\frac{1}{2t}\int_{(1+t)^2}^{(1-t)^2} \frac{dy}{y} = \frac{1}{2t}\int_{(1-t)^2}^{(1+t)^2} \frac{dy}{y} = \frac{1}{2t} ln\,[y]\Big|_{(1-t)^2}^{(1+t)^2}$$

$$= \frac{1}{2t}\left(ln\left[(1+t)^2\right] - ln\left[(1-t)^2\right]\right) = \frac{1}{2t} ln\left[\frac{1+t}{1-t}\right]^2 = \frac{1}{t} ln\left[\frac{1+t}{1-t}\right]$$

olarak hesaplanır. Bu ifade Taylor serisine açılırsa

$$\frac{1}{t} ln\left[\frac{1+t}{1-t}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2t^{2n}}{(2n+1)}$$

olur. Sol taraftaki integralin seri eşdeğeri, yerine konulursa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2t^{2n}}{(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx$$

olur. Bu eşitliğin sağlanması $\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$ olmasıyla mümkündür. Buna göre normalize Legendre polinomları

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x) \tag{6.53}$$

biçimindedir. Sonuç olarak, Legendre polinomlarının ortonomalize şartı

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \text{ ise} \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \text{ ise} \end{cases} \tag{6.54}$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 6.14 P_0, P_1 ve P_2 Legendre polinomlarını normlayın.

Çözüm 6.14 (6.53) kullanılırsa
$n = 0 \Rightarrow P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$n = 1 \Rightarrow P_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x$
$n = 2 \Rightarrow P_2(x) = \sqrt{\frac{5}{8}}\left(3x^2 - 1\right)$ bulunur.

Örnek 6.15 Normalize $P_2(x)$ için $\int\limits_{-1}^{1} [P_2(x)]^2\, dx = 1$ olduğunu gösterin.

Çözüm 6.15 $P_2(x)$ yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\int\limits_{-1}^{1} [P_2(x)]^2\, dx = \int\limits_{-1}^{1} \left[\sqrt{\frac{5}{8}}\left(3x^2 - 1\right)\right]^2 dx = \frac{5}{8}\int\limits_{-1}^{1} \left(9x^4 - 6x^2 + 1\right) dx$$

$$= \frac{5}{8}\left[9\frac{x^5}{5} - 6\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{+1} = \frac{5}{8}\left[\left(\frac{9}{5} - 2 + 1\right) - \left(-\frac{9}{5} + 2 - 1\right)\right]$$

$$= \frac{5}{8}\left[\frac{18}{5} - 2\right] = \frac{5}{8}\left[\frac{18 - 10}{5}\right] = \frac{5}{8} \times \frac{8}{5} = 1$$

bulunur.

Örnek 6.16 Kuantum mekaniğine göre, geçiş olasılığının açısal kısmınının hesabında karşılaşılan
$\langle Cos\theta\rangle_{mn} = \langle x\rangle_{mn} = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{\frac{2m+1}{2}} P_m(x) x \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x) dx$ şeklinde integrali hesaplayınız.

Çözüm 6.16 Bu integrali

$$I = \sqrt{\frac{2m+1}{4(2n+1)}} \int\limits_{-1}^{1} \left[(2n+1)xP_n(x)\right] P_m(x)dx$$

şeklinde yazalım. (6.44) tekrarlama bağıntısından $(2n+1)xP_n(x)$ terimi yalnız bırakılırsa

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$$

elde edilir. Bu ifade yerine yazılırsa

$$I = \sqrt{\frac{2m+1}{4(2n+1)}} \left[(n+1)\underbrace{\int\limits_{-1}^{1} P_{n+1}(x)P_m(x)dx}_{I_1} + n\underbrace{\int\limits_{-1}^{1} P_{n-1}(x)P_m(x)dx}_{I_2} \right]$$

olur. I_1, $m = n + 1$ ve I_2 ise $m = n - 1$ olmadıkça sıfırdır. $m = n + 1$ olması durumunda $I_2 = 0$ olur. Normalizasyon bağıntısından I_1 için

$$I_1 = \int_{-1}^{1} P_{n+1}(x) P_{n+1}(x) dx = \frac{2}{2(n+1)+1} = \frac{2}{2n+3}$$

bulunur. $m = n - 1$ olması durumunda ise $I_1 = 0$ olur. I_2 için

$$I_2 = \int_{-1}^{1} P_{n-1}(x) P_{n-1}(x) dx = \frac{2}{2(n-1)+1} = \frac{2}{2n-1}$$

olur. Düzenlenirse

$$\langle x \rangle_{mn} = \begin{cases} \frac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}, & m = n+1, \; n \geq 0 \\ \frac{n}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}, & m = n-1, \; n \geq 1 \end{cases}$$

bulunur.■

6.7 Bağlı Legendre Polinomları

Bu kesimde, Legendre polinomlarının türevlerinden elde edilebilen ve belli şartlar altında Legendre polinomlarına indirgenebilen yeni dik bir polinom ailesini, $P_n^m(x)$ bağlı Legendre polinomlarını ele alacağız. Bağlı Legendre polinomları

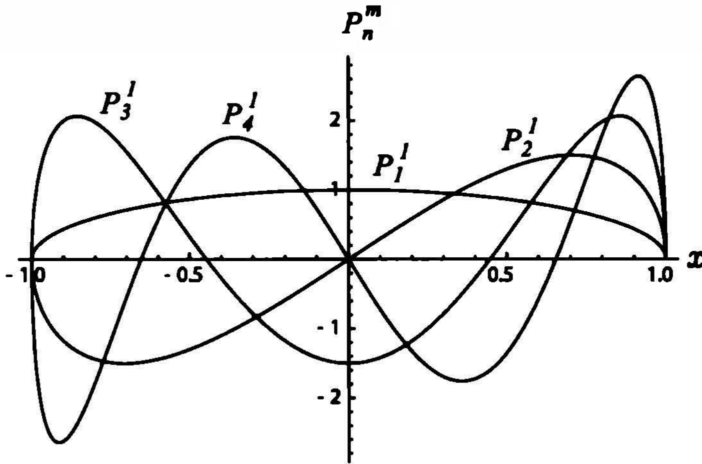
$$P_n^m(x) = \left(1 - x^2\right)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x), \; m \geq 0 \tag{6.55}$$

şeklinde verilen Rodriguez formülü yardımıyla elde edilebilirler. Bu yolla elde edilmiş bazı $P_n^m(x)$ polinomları Tablo 6.4'te verilmiştir.

Tablo 6.4 Bazı Bağlı Legendre Polinomları

n	m	$P_n^m(x)$
0	0	$P_0^0(x) = 1$
1	0	$P_1^0(x) = x$
1	1	$P_1^1(x) = \left(1 - x^2\right)^{1/2}$
2	0	$P_2^0(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$
2	1	$P_2^1(x) = 3x\left(1 - x^2\right)^{1/2}$
2	2	$P_2^2(x) = 3\left(1 - x^2\right)$
3	0	$P_3^0(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$
3	1	$P_3^1(x) = \frac{3}{2}\left(5x^2 - 1\right)\left(1 - x^2\right)^{1/2}$
3	2	$P_3^2(x) = 15x\left(1 - x^2\right)$
3	3	$P_3^3(x) = 15\left(1 - x^2\right)^{3/2}$

Örnek olarak $[-1,1]$ aralığında $P_1^1(x)$, $P_2^1(x)$, $P_3^1(x)$ ve $P_4^1(x)$ polinomlarının x'e bağlı grafikleri Şekil 6.5'te verilmiştir.



Şekil 6.5 $P_1^1(x)$, $P_2^1(x)$, $P_3^1(x)$ ve $P_4^1(x)$ polinomlarının x'e göre değişimi

$P_n^m(x)$'ler, $P_n(x)$ polinomlarından elde edildikleri için onlara bağlıdırlar. Dik polinomların türevinden elde edildiklerinden dolayı bağlı Legendre polinomları da diktirler. Ayrıca $(1-x^2)$ çarpanı nedeniyle, $m=0$ durumları hariç $x=\mp1$ değerlerinde $P_n^m(\mp1)=0$ değerini alırlar. n. dereceden bir polinomun n kere türevinden sonraki türevi, 0 olacağından m üzerinde $m \leq n$ olma şartı vardır. $m=0$ için, bağlı Legendre polinomları

$$P_n^0(x) = P_n(x) \tag{6.56}$$

Legendre polinomlarına indirgenir. Gerçekte m sayısının $-n \leq m \leq n$ aralığındaki değerleri izinlidir. Bu durumda negatif m'lere karşılık gelen bağlı Legendre polinomları

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) \tag{6.57}$$

ifadesi kullanılarak elde edilebilir. Örneğin, $P_3^{-1}(x)$ için

$$P_3^{-1}(x) = (-1)^1 \frac{(3-1)!}{(3+1)!} P_3^1(x) = -\frac{2}{24} P_3^1(x) = -\frac{1}{8}\left(5x^2-1\right)\left(1-x^2\right)^{1/2}$$

bulunur.

Bağlı Legendre Polinomlarının Bazı Özellikleri:

1. *Sağladığı diferansiyel denklem:* Bağlı Legendre polinomları

$$\left(1-x^2\right) \frac{d^2}{dx^2} P_n^m(x) - 2x \frac{d}{dx} P_n^m(x) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] P_n^m(x) = 0 \tag{6.58}$$

biçimindeki ikinci mertebeden diferansiyel denklemi sağlarlar. Bu denklem, $m = 0$ durumunda (6.51) ile verilen Legendre diferansiyel denklemine indirgenir. Küresel koordinatlarda Schrödinger denklemini çözerken bu denklemle karşılaşırız. Söz konusu problemde n'nin yerine $\ell = 0, 1, 2, 3, ...$ açısal momentum kuantum sayıları gelir. m ise $-\ell \leq m \leq +\ell$ aralığında değer alabilen manyetik kuantum sayılarıdır. (6.58) 'de $x = Cos\theta$ dönüşümü yapılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, $P_\ell^m(Cos\theta)$ polinomları için

$$\frac{1}{Sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[Sin\theta\frac{d}{d\theta}P_\ell^m(Cos\theta)\right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{Sin^2\theta}\right]P_\ell^m(Cos\theta) = 0 \quad (6.59)$$

bağlı Legendre diferansiyel denklemi elde edilir.

2. Tekrarlama bağıntısı: Bağlı Legendre polinomları için birden fazla tekrarlama bağıntısı türetilebilir. Burada üçünü ispatsız verelim:

$$P_{n+1}^{m+1}(x) = (2n+1)\left(1-x^2\right)^{1/2}P_n^m(x) + P_{n-1}^{m+1}(x) \quad (6.60)$$

$$(2n+1)\,xP_n^m(x) = (n-m+1)P_{n+1}^m(x) + (n+m)P_{n-1}^m(x) \quad (6.61)$$

$$P_n^{m+1}(x) - \frac{2mx}{(1-x^2)^{1/2}}P_n^m(x) + [n(n+1) - m(m-1)]\,P_n^{m-1}(x) = 0 \quad (6.62)$$

3. Türev Özelliği: Bağlı Legendre polinomları için

$$\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx}P_n^m(x) = -nxP_n^m(x) + (n+m)P_{n-1}^m(x) \quad (6.63)$$

$$2\left(1-x^2\right)^{1/2}\frac{d}{dx}P_n^m(x) = P_n^{m+1}(x) - (n+m)(n-m+1)P_n^{m-1}(x) \quad (6.64)$$

türev bağıntıları yazılabilir.

4. Parite: Bağlı Legendre polinomları için parite

$$P_n^m(-x) = (-1)^{m+n}\,P_n^m(x) \quad (6.65)$$

biçimindedir.

5. Ortonormalize Şartı: Bağlı Legendre polinomları için diklik ve normalizasyon integrali

$$\int_{-1}^{1} P_p^m(x)P_q^m(x)dx = \frac{2}{2q+1}\frac{(q+m)!}{(q-m)!}\delta_{pq} \quad (6.66)$$

biçimindedir. $x = Cos\theta$ dönüşümü yapılırsa bu ifade

$$\int_{0}^{\pi} P_p^m(Cos\theta)P_q^m(Cos\theta)Sin\theta d\theta = \frac{2}{2q+1}\frac{(q+m)!}{(q-m)!}\delta_{pq} \quad (6.67)$$

olur.

Örnek 6.17 $\int_0^\pi Sin^2\theta P_n^1(Cos\theta)d\theta$ integralini hesaplayınız.

Çözüm 6.17 $P_1^1(Cos\theta) = Sin\theta$ polinomu kullanılarak bu integral

$$\int_0^\pi Sin^2\theta P_n^1(Cos\theta)d\theta = \int_0^\pi P_1^1(Cos\theta)P_n^1(Cos\theta)Sin\theta d\theta$$

biçiminde yazılabilir. (6.67) normlama şartına göre $n = 1$ olmadıkça bu integral sıfırdır. $n = 1$ için ise

$$\int_0^\pi P_1^1(Cos\theta)P_1^1(Cos\theta)Sin\theta d\theta = \frac{2}{3}\frac{2!}{0!} = \frac{4}{3}$$

bulunur.

Örnek 6.18 $P_1^1(x)$ ve $P_2^1(x)$ polinomlarının dik olduklarını gösterin.

Çözüm 6.18 Eğer $\int_{-1}^1 P_1^1(x)P_2^1(x)dx = 0$ olursa bu polinomlar diktir. $P_1^1(x)$ ve $P_2^1(x)$ polinomları yerine yazılır ve integral alınırsa

$$\int_{-1}^1 \left(1-x^2\right)^{1/2} 3x\left(1-x^2\right)^{1/2} dx = 3\int_{-1}^1 x\left(1-x^2\right)dx = 3\int_{-1}^1 \left(x-x^3\right)dx$$

$$= 3\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^1 = 3\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\right] = 0$$

bulunur.■

6.8 Laguerre Polinomları

$0 \le x \le \infty$ aralığında tanımlı olan Laguerre polinomları $L_n(x)$ ile gösterilir. n tamsayı olmak üzere Laguerre polinomları

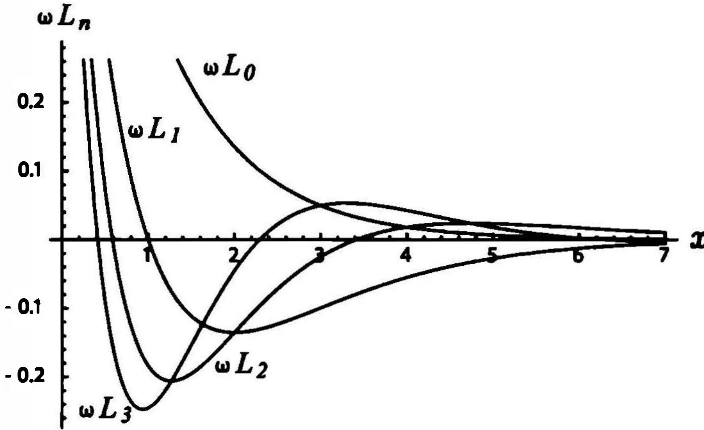
$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)\ ,\ n \ge 0 \qquad (6.68)$$

Rodriguez formülünden elde edilebilir. (6.23) ile karşılaştırılırsa ağırlık fonksiyonunun $\omega(x) = e^{-x}$, $g(x) = x$ ve $e_n = n!$ olduğu aşikardır. (6.68) yardımı ile $n = 6$'ya kadar elde edilen Laguerre polinomları Tablo 6.5'te verilmiştir.

Tablo 6.5 Bazı Laguerre Polinomları

n	$L_n(x)$
0	$L_0(x) = 1$
1	$L_1(x) = -x + 1$
2	$L_2(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 2\right)$
3	$L_3(x) = \frac{1}{6}\left(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6\right)$
4	$L_4(x) = \frac{1}{24}\left(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24\right)$
5	$L_5(x) = \frac{1}{120}\left(-x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120\right)$
6	$L_6(x) = \frac{1}{720}\left(x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720\right)$

$0 \leq x \leq \infty$ aralığında tanımlı olduklarından, Laguerre polinomları için parite kavramının anlamsız olduğunu belirtelim. $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ ve $L_3(x)$ Laguerre polinomlarının $\omega(x) = e^{-x}$ ağırlık fonksiyonu ile çarpımının $0 \leq x \leq 7$ aralığında x'e bağlı grafiği Şekil 6.6'te verilmiştir.



Şekil 6.6 Ağırlıklı $L_0(x), L_1(x), L_2(x)$ ve $L_3(x)$ polinonları

Şekil 6.6'dan görüldüğü gibi x'in büyük değerlerinde ağırlıklı Laguerre polinomlarının değeri hızlıca azalmaktadır. ωL_0, x eksenini kesmezken, ωL_1 bir, ωL_2 iki kere kesmektedir. Laguerre polinomlarının bazı özelliklerini elde etmek amacıyla üretici fonksiyondan başlamak uygun olmaktadır. Laguerre polinomlarını üreten fonksiyon

$$G(x,t) = \frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t}, \quad |t| < 1 \tag{6.69}$$

biçimindedir. $G(x,t)$, $t=0$ civarında Taylor serisine açılırsa

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial t^n} G(x,t)\bigg|_{t=0} \frac{t^n}{n!} \\ &= 1 + (-x+1)\frac{t}{1!} + \left(x^2 - 4x + 2\right)\frac{t^2}{2!} + \left(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6\right)\frac{t^3}{3!} \\ &\quad +(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24)\frac{t^4}{4!} + \ldots \end{aligned}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa, t^n'nin katsayıları Laguerre polinomlarıdır:

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \underbrace{1}_{L_0(x)} + \underbrace{(-x+1)t}_{L_1(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 2\right)t^2}_{L_2(x)} + \underbrace{\frac{1}{6}\left(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6\right)t^3}_{L_3(x)} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24)t^4}_{L_4(x)} + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n \qquad (6.70) \end{aligned}$$

Laguerre polinomlarının bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

1. Tekrarlama Bağıntısı:

$\frac{\partial}{\partial t} G(x,t)$ kısmi türev ile kendisi arasında

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t}\right] = \frac{e^{-xt/(1-t)}\,(-1+t+x)}{(t-1)^3} \\ &= \frac{(-1+t+x)}{(-t^2+2t-1)} G(x,t) \\ &\Rightarrow \left(-t^2 + 2t - 1\right)\frac{\partial}{\partial t} G(x,t) + (1-t-x)\,G(x,t) = 0 \end{aligned}$$

bağıntısı bulunur. $G(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n$'nin t'ye göre kısmi türevi($n \to m$ değişikliği yapılarak)

$$\frac{\partial}{\partial t} G(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\sum_{m=0}^{\infty} L_m(x)t^m = \sum_{m=1}^{\infty} L_m(x) m t^{m-1}$$

olur. $L_0(x)t^0$ şeklindeki sabit terimin türevi sıfır olduğundan toplamın 1'den başladığına dikkat edelim. Türev ifadesi yerine yazılırsa

$$\left(-t^2 + 2t - 1\right)\sum_{m=1}^{\infty} L_m(x) m t^{m-1} + (1-t-x)\sum_{m=0}^{\infty} L_m(x)t^m = 0$$

elde edilir. Çarpımlar dağıtılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= -t^2\sum_{m=1}^{\infty} L_m(x)mt^{m-1} + 2t\sum_{m=1}^{\infty} L_m(x)mt^{m-1} - \sum_{m=1}^{\infty} L_m(x)mt^{m-1} \\ &+\sum_{m=0}^{\infty} L_m(x)t^m - t\sum_{m=0}^{\infty} L_m(x)t^m - x\sum_{m=0}^{\infty} L_m(x)t^m \end{aligned}$$

bulunur. t'li çarpanlar toplamın içine alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= -\sum_{m=1}^{\infty} L_m(x)mt^{m+1} + 2\sum_{m=1}^{\infty} L_m(x)mt^m - \sum_{m=1}^{\infty} L_m(x)mt^{m-1} \\ &+\sum_{m=0}^{\infty} L_m(x)t^m - \sum_{m=0}^{\infty} L_m(x)t^{m+1} - x\sum_{m=0}^{\infty} L_m(x)t^m \end{aligned}$$

olur. Bu eşitliği t^n ortak çarpanında toplamak istersek; birinci ve beşinci terimlerde $m+1 = n (\Rightarrow m = n-1)$, ikinci, dördüncü ve altıncı terimlerde $m = n$, üçüncü terimde $m-1 = n (\Rightarrow m = n+1)$ yazılmalıdır. Buna göre

$$\begin{aligned} 0 &= -\sum_{n=2}^{\infty} L_{n-1}(x)(n-1)t^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} L_n(x)nt^n - \sum_{n=0}^{\infty} L_{n+1}(x)(n+1)t^n \\ &+\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}(x)t^n - x\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n \end{aligned}$$

olur. Bu ifadede toplamlar farklı indislerle başlamaktadır. Fakat tekrarlama bağıntısını bulmak için, $n \geq 2$ olan ortak terimleri göz önüne almak ve t^n 'nin katsayılarını sıfıra eşitlemek yeterlidir. Buna göre,

$$-(n-1)\,L_{n-1}(x) + 2nL_n(x) - (n+1)L_{n+1}(x) + L_n(x) - L_{n-1}(x) - xL_n(x) = 0$$

olur. Bu ifade düzenlenirse, Laguerre polinomları için tekrarlama bağıntısı

$$(n+1)\,L_{n+1}(x) = (2n+1-x)\,L_n(x) - nL_{n-1}(x) \qquad (6.71)$$

olarak bulunur. Şüphesiz başka tekrarlama bağıntıları bulmak mümkündür.

2. Türev Bağıntısı:

Üretici fonksiyonun x'e göre kısmi türevi ile kendisi arasında

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}G(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t}\right] = -\frac{t}{(1-t)}G(x,t) \\ &\Rightarrow (1-t)\frac{\partial}{\partial x}G(x,t) = -tG(x,t) \end{aligned}$$

eşitliği vardır. (6.70) ile verilen $G(x,t)$ yerine yazılır($n \to m$) ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}(1-t)\frac{\partial}{\partial x}\sum_{m=0}^{\infty}L_m(x)t^m &= -t\sum_{m=0}^{\infty}L_m(x)t^m \\ (1-t)\sum_{m=0}^{\infty}t^m\underbrace{\frac{d}{dx}L_m(x)}_{L'_m(x)} &= -\sum_{m=0}^{\infty}L_m(x)t^{m+1}\end{aligned}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}t^mL'_m(x)-\sum_{m=0}^{\infty}t^{m+1}L'_m(x)+\sum_{m=0}^{\infty}t^{m+1}L_m(x)=0$$

bulunur. Bu eşitlik t^n ortak çarpanına alınmak istenirse, birinci terimde $m=n$, ikinci ve üçüncü terimlerde $m+1=n(\Rightarrow m=n-1)$ yazılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty}t^nL'_n(x)-\sum_{n=1}^{\infty}t^nL'_{n-1}(x)+\sum_{n=1}^{\infty}t^nL_{n-1}(x)=0$$

elde edilir. Her $n\geq 1$ için eşitliğin sağlanabilmesi t^n 'nin ortak parantezine alınacak ifadenin sıfır olmasıyla mümkün olur. Buradan

$$L'_n(x)-L'_{n-1}(x)=-L_{n-1}(x),\ n\geq 1 \qquad (6.72)$$

türev bağıntısı bulunur. Eğer(*Problem 6.11*)

$$x\frac{\partial}{\partial x}G(x,t)=t\frac{\partial}{\partial t}G(x,t)-t\frac{\partial}{\partial t}\left[t\ G(x,t)\right]$$

eşitliğinden yola çıkılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$xL'_n(x)=n\left[L_n(x)-nL_{n-1}(x)\right] \qquad (6.73)$$

diğer bir türev bağıntısı bulunabilir.

3. Laguerre Diferansiyel Denklemi:

(6.68) ile verilen Rodriguez formülünden, türev terimi

$$L_n(x)=\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^n\right)\Rightarrow\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)=\frac{n!}{e^x}L_n(x)=n!e^{-x}L_n(x)$$

biçiminde yazılabilir. Sonra kullanmak üzere $u=e^{-x}x^n$ çarpımının türevleri için genel bir kural bulmak istiyoruz. Birinci türev için

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e^{-x}x^n) &= u'=ne^{-x}x^{n-1}-e^{-x}x^n=e^{-x}(nx^{n-1}-x^n) \\ &= e^{-x}x^n\left[\frac{n}{x}-1\right]=e^{-x}x^n\left[\frac{n-x}{x}\right]=u\left[\frac{n-x}{x}\right]\end{aligned}$$

$$u'x = (n-x)u = 0 \Rightarrow u'x + (x-n)u = 0$$

bulunur. İkinci türev için işlem yapılırsa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[u'x + (x-n)u\right] &= u''x + u' + u + (x-n)u' = 0 \\ &\Rightarrow xu'' + (x-n+1)u' + u = 0\end{aligned}$$

olur. Üçüncü türev

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[xu'' + (x-n+1)u' + u\right] &= xu''' + u'' + (x-n+1)u'' + u' + u' = 0 \\ &\Rightarrow xu''' + (x-n+2)u'' + 2u' = 0\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böyle devam edilirse $(n+2)$. türev için

$$xu^{(n+2)} + (x+1)u^{(n+1)} + (n+1)u^{(n)} = 0 \tag{6.74}$$

bulunur. Diğer yandan $u^{(n)}$, $u^{(n+1)}$, $u^{(n+2)}$ ile Laguerre polinomları arasında

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n) = \frac{d^n}{dx^n}u = n!e^{-x}L_n(x)$$

$$\Rightarrow u^{(n)} = n!e^{-x}L_n(x)$$

$$\frac{d}{dx}u^{(n)} = u^{(n+1)} = n!\left[-e^{-x}L_n(x) + e^{-x}L'_n(x)\right]$$

$$\Rightarrow u^{(n+1)} = n!e^{-x}\left[L'_n(x) - L_n(x)\right]$$

$$\frac{d}{dx}u^{(n+1)} = u^{(n+2)} = n!\left\{-e^{-x}\left[L'_n(x) - L_n(x)\right] + e^{-x}\left[L''_n(x) - L'_n(x)\right]\right\}$$

$$\Rightarrow u^{(n+2)} = n!e^{-x}\left[L''_n(x) - 2L'_n(x) + L_n(x)\right]$$

ilişkisi vardır. $u^{(n)}$, $u^{(n+1)}$, $u^{(n+2)}$ türevleri (6.74)'te yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}0 = \; & n!e^{-x}\left\{x\left[L''_n(x) - 2L'_n(x) + L_n(x)\right] + (x+1)\left[L'_n(x) - L_n(x)\right]\right. \\ & \left. + (n+1)L_n(x)\right\}\end{aligned}$$

Laguerre diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi bulunur:

$$xL''_n(x) + (1-x)L'_n(x) + nL_n(x) = 0 \tag{6.75}$$

3. Ortonormalize Şartı:

$L_n(x)$ Laguerre polinomları ortogonal bir küme oluşturmazlar. Fakat $\{e^{-x/2}L_n(x)\}$ ailesi ortogonaldir. Bu nedenle diklik şartı için

$$\int_0^\infty \left[e^{-x/2}L_n(x)\right]\left[e^{-x/2}L_m(x)\right]dx = \int_0^\infty e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx = 0$$

olduğunu ispatlamak gerekir. $L_m(x)$ ve $L_n(x)$ için Laguerre denklemleri

$$\begin{aligned} xL''_m(x) + (1-x)L'_m(x) + mL_m(x) &= 0 \quad (1) \\ xL''_n(x) + (1-x)L'_n(x) + nL_n(x) &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Birinci denklem $L_n(x)$, ikincisi ise $L_m(x)$ ile çarpılırsa

$$xL_n(x)L''_m(x) + (1-x)L_n(x)L'_m(x) + mL_n(x)L_m(x) = 0$$

$$xL_m(x)L''_n(x) + (1-x)L_m(x)L'_n(x) + nL_m(x)L_n(x) = 0$$

bulunur. Bu iki denklem taraf tarafa çıkarılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} & x\left[L_n(x)L''_m(x) - L_m(x)L''_n(x)\right] + (1-x)\left[L_n(x)L'_m(x) - L_m(x)L'_n(x)\right] \\ = \; & (n-m)L_n(x)L_m(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı e^{-x} ile çarpılırsa

$$xe^{-x}\left[L_n(x)L''_m(x) - L_m(x)L''_n(x)\right] + (1-x)e^{-x}\left[L_n(x)L'_m(x)\right.$$

$$\left. - L_m(x)L'_n(x)\right] = (n-m)e^{-x}L_n(x)L_m(x) \tag{6.76}$$

olur. Şimdi $\frac{d}{dx}\left\{xe^{-x}\left[L_n(x)L'_m(x) - L_m(x)L'_n(x)\right]\right\}$ biçimindeki bir ifadenin türevine bakalım:

$$\frac{d}{dx}\left\{xe^{-x}\left[L_n(x)L'_m(x) - L_m(x)L'_n(x)\right]\right\} = e^{-x}\left[L_n(x)L'_m(x) - L_m(x)L'_n(x)\right]$$

$$-xe^{-x}\left[L_n(x)L'_m(x) - L_m(x)L'_n(x)\right]$$

$$+xe^{-x}\left[L'_n(x)L'_m(x) \quad + L_n(x)L''_m(x) - L'_m(x)L'_n(x) - L_m(x)L''_n(x)\right]$$

Son satırdaki $L'_n(x)L'_m(x)$ ile $-L'_m(x)L'_n(x)$ terimleri sadeleşir. Kalan terimler düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}\left\{xe^{-x}\left[L_n(x)L'_m(x) - L_m(x)L'_n(x)\right]\right\} \\ = \; & e^{-x}(1-x)\left[L_n(x)L'_m(x) - L_m(x)L'_n(x)\right] \\ & +xe^{-x}\left[L_n(x)L''_m(x) - L_m(x)L''_n(x)\right] \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadede eşitliğin sağ tarafı, (6.76)'nın sol tarafına eşittir. Sağ taraf, (6.76) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\frac{d}{dx}\left\{xe^{-x}\left[L_n(x)L'_m(x) - L_m(x)L'_n(x)\right]\right\} = (n-m)e^{-x}L_n(x)L_m(x)$$

biçiminde yazmak mümkündür. İki tarafın $[0, \infty]$ aralığında integrali alınırsa

$$\int_0^\infty \frac{d}{dx}\left\{xe^{-x}\left[L_n(x)L'_m(x) - L_m(x)L'_n(x)\right]\right\}dx$$

$$= \quad (n-m)\int_0^\infty e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx$$

$$\Rightarrow xe^{-x}\left[L_n(x)L'_m(x) - L_m(x)L'_n(x)\right]\Big|_0^\infty = (n-m)\int_0^\infty e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx$$

bulunur. Sol taraf xe^{-x} teriminden dolayı sıfırdır. Bu yüzden

$$(n-m)\int_0^\infty e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx = 0$$

olur. $n \neq m$ için $n - m \neq 0$ olduğundan

$$\int_0^\infty e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx = \int_0^\infty \left[e^{-x/2}L_n(x)\right]\left[e^{-x/2}L_m(x)\right]dx = 0 \qquad (6.77)$$

olacağı açıktır. Bu sonuca göre, $\left\{e^{-x/2}L_n(x)\right\}$ ile $\left\{e^{-x/2}L_m(x)\right\}$ fonksiyon aileleri ortogonaldir.

Şimdi $\left\{e^{-x/2}L_n(x)\right\}$ fonksiyon ailesini normlamak istiyoruz. (6.69) ile verilen $G(x,t)$ üretici fonksiyonu bir kez de $G(x,s)$ için yazılırsa

$$G(x,t) = \frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n$$

$$G(x,s) = \frac{e^{-xs/(1-s)}}{1-s} = \sum_{m=0}^{\infty} L_m(x)s^m$$

olur. Bu iki eşitlik taraf tarafa çarpıldıktan sonra e^{-x} ile çarpılır ve $[0, \infty]$ aralığında x'e göre integrali alınırsa

$$\underbrace{\int_0^\infty \frac{e^{-x(1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s})}}{(1-t)(1-s)}dx}_{I} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} t^n s^m \int_0^\infty e^{-x}L_n(x)L_m(x)dx$$

bulunur. Eşitliğin sol tarafındaki integral

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{(1-t)(1-s)}\int_0^\infty e^{-x(1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s})}dx \\ &= \frac{1}{(1-t)(1-s)}\left[\frac{-e^{-x(1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s})}}{1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s}}\right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{(1-t)(1-s)}\left[0+\frac{1}{1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s}}\right]\end{aligned}$$

$$I = \frac{1}{(1-t)(1-s)}\left[\frac{(1-t)(1-s)}{(1-t)(1-s)+t(1-s)+s(1-t)}\right] = \frac{1}{1-st}$$

bulunur. $\frac{1}{1-st}$ ifadesi s veya t'ye göre seriye açılırsa

$$I = \frac{1}{1-st} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n s^n$$

elde edilir. Bu integralin seri eşdeğeri yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n s^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} t^n s^m \int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx$$

olur. Sol taraf tek toplam üzerinden iken, sağ taraf çift toplam üzerindendir. Eşitliğin sağlanabilmesi için $m = n$ olmalıdır. Buna göre sağdaki toplamın biri kalkar ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n s^n \int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_n(x) dx$$

elde edilir. Her n için bu eşitliğin sağlanması

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_n(x) dx = 1 \qquad (6.78)$$

olmasıyla mümkündür. Bu, ağırlıklı Laguerre polinomları için normalizasyon şartıdır. Buna göre, Laguerre polinomlarını içeren ortonormalize bir fonksiyon ailesi

$$\varphi_n(x) = e^{-x/2} L_n(x), \; n = 0, 1, 2, 3, ... \qquad (6.79)$$

biçiminde olacaktır.

Örnek 6.19 (6.79) eşitliğinden yararlanarak $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ fonksiyonlarını elde edin.

Çözüm 6.19 $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = -x + 1$ ve $L_2(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 2\right)$ olduğunu biliyoruz. Buna göre;

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= e^{-x/2}L_0(x) = e^{-x/2} \\
\varphi_1(x) &= e^{-x/2}L_1(x) = (1 - x)\, e^{-x/2} \\
\varphi_2(x) &= e^{-x/2}L_2(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 2\right) e^{-x/2}
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 6.20 $\varphi_0(x)$ ve $\varphi_1(x)$ fonksiyonlarının ortogonal olduklarını gösterin.

Çözüm 6.20 Eğer $\int_0^\infty \varphi_0(x)\varphi_1(x)dx = 0$ olursa, $\varphi_0(x)$ ve $\varphi_1(x)$ fonksiyonları ortogonaldir. Söz konusu integral Gama integrali cinsinden yazılırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \varphi_0(x)\varphi_1(x)dx &= \int_0^\infty e^{-x/2}\,(1 - x)\, e^{-x/2}dx = \int_0^\infty (1 - x)\, e^{-x}dx \\
&= \underbrace{\int_0^\infty e^{-x}dx}_{\Gamma(1)} - \underbrace{\int_0^\infty x e^{-x}dx}_{\Gamma(2)} = 0! - 1! = 1 - 1 = 0
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Öyleyse, $\varphi_0(x)$ ve $\varphi_1(x)$ fonksiyonları ortogonaldir.■

6.9 Bağlı Laguerre Polinomları

Bağlı Laguerre polinomları, kuantum mekaniğinde, Hidrojen atomunun radyal Schrödinger dalga denklemini çözerken karşımıza çıkar. Laguerre polinomlarına bağlıdırlar. Bağlı Laguerre polinomları uygun şartlarda Laguerre polinomlarına indirgenirler.

$$L_{n+k}(x) = \frac{e^x}{(n+k)!}\frac{d^{n+k}}{dx^{n+k}}(e^{-x}x^{n+k}),\ n, k \geq 0$$

olmak üzere, $L_n^k(x)$ bağlı Laguerre polinomları

$$L_n^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x),\ k \leq n \tag{6.80}$$

ifadesinden elde edilebilirler. Bağlı Laguerre polinomları, $k = 0$ durumunda

$$L_n^0(x) = L_n(x)$$

Laguerre polinomlarına indirgenirler. Bazı $L_n^k(x)$ polinomları Tablo 6.6'te verilmiştir.

Tablo 6.6 Bazı Bağlı Laguerre Polinomları

n	k	$L_n^k(x)$
0	0	$L_0^0(x) = 1$
1	0	$L_1^0(x) = -x + 1$
1	1	$L_1^1(x) = -x + 2$
2	0	$L_2^0(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 2\right)$
2	1	$L_2^1(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 6x + 6\right)$
2	2	$L_2^2(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 8x + 12\right)$
3	0	$L_3^0(x) = \frac{1}{6}\left(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6\right)$
3	1	$L_3^1(x) = \frac{1}{6}\left(-x^3 + 12x^2 - 36x + 24\right)$
3	2	$L_3^2(x) = \frac{1}{6}(-x^3 + 15x^2 - 60x + 60)$
3	3	$L_3^3(x) = \frac{1}{6}(-x^3 + 18x^2 - 90x + 120)$

Bağlı Laguerre polinomları için Rodriguez formülü

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x}x^{n+k}\right],\ k \leq n \qquad (6.81)$$

şeklindedir. Bağlı Laguerre polinomlarının bazı özelliklerini ispatsız vereceğiz.

Bağlı Laguerre Polinomlarının Bazı Özellikleri:

1. Üretici Fonksiyon: Bağlı Laguerre Polinomlarının üretici fonksiyonu

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x)t^n = \frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)^{k+1}},\ |t| < 1 \qquad (6.82)$$

ile verilir.

2. Sağladığı diferansiyel denklem: Bağlı Laguerre polinomlarının çözüm olduğu diferansiyel denklem

$$x\frac{d^2}{dx^2}L_n^k(x) + (k+1-x)\frac{d}{dx}L_n^k(x) + nL_n^k(x) = 0 \qquad (6.83)$$

şeklindedir.

3. Tekrarlama bağıntısı: Bağlı Laguerre polinomları için tekrarlama bağıntılarından ikisi

$$(n+1)\,L_{n+1}^k(x) = (2n+k+1-x)\,L_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x) \qquad (6.84)$$

$$L_n^k(x) = L_{n-k}^k(x) + L_n^{k-1}(x) \qquad (6.85)$$

şeklinde verilebilir.

4. Türev Özelliği: Bağlı Laguerre polinomları için türev bağıntısı

$$x\frac{d}{dx}L_n^k(x) = nL_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x) \tag{6.86}$$

biçimindedir.

5. Ortonormalize Şartı: Bağlı Laguerre polinomları için diklik ve normalizasyon integrali

$$\int_0^\infty e^{-x}x^k L_n^k(x)L_m^k(x)dx = \frac{(n+k)!}{n!}\delta_{nm} \tag{6.87}$$

biçimindedir. Burada $\omega(x) = e^{-x}x^k$ ağırlık fonksiyonudur. Bağlı Laguerre polinomlarını içeren ortonormal bir fonksiyon ailesi

$$\varphi_n^k(x) = \sqrt{\frac{n!}{(n+k)!}}e^{-x/2}x^{k/2}L_n^k(x) \tag{6.88}$$

ifadesiyle elde edilebilir. Bu bağıntıların $k = 0$ alınması durumunda, Laguerre polinomlarına ait aynı bağıntılara indirgendiğini belirtelim.

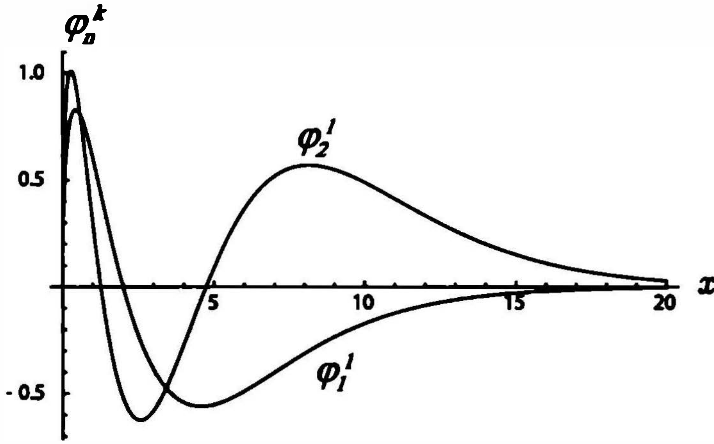
Örnek 6.21 (6.88) yardımı ile $\varphi_1^1(x)$ ve $\varphi_2^1(x)$ fonksiyonlarını elde edin ve $[0, 20]$ aralığında x'e bağlı grafiğini çizin.

Çözüm 6.21 $L_1^1(x) = -x+2$ ve $L_2^1(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 6x + 6\right)$ polinomları yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\varphi_1^1(x) &= \sqrt{\frac{1!}{(1+1)!}}e^{-x/2}x^{1/2}L_1^1(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}(2-x)e^{-x/2}x^{1/2} \\
\varphi_2^1(x) &= \sqrt{\frac{2!}{(2+1)!}}e^{-x/2}x^{1/2}L_2^1(x) = \sqrt{\frac{1}{12}}\left(x^2 - 6x + 6\right)e^{-x/2}x^{1/2}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\varphi_1^1(x)$ ve $\varphi_2^1(x)$ fonksiyonlarının $[0, 20]$ aralığında x'e bağlı grafiği

Şekil 6.7'de verilmiştir.



Şekil 6.7 $\varphi_1^1(x)$ ve $\varphi_2^1(x)$ fonksiyonlarının x'e göre değişimi

Örnek 6.22 $I = \int_0^\infty x e^{-x} x^k L_n^k(x) L_n^k(x) dx$ integralini hesaplayın.

Çözüm 6.22 I integralini

$$I = \int_0^\infty e^{-x} x^k \left[x L_n^k(x) \right] L_n^k(x) dx$$

biçimde yazalım. (6.84) ifadesinden $x L_n^k(x)$ çarpımı yalnız bırakılırsa

$$x L_n^k(x) = (2n + k + 1) L_n^k(x) - (n + k) L_{n-1}^k(x) - (n + 1) L_{n+1}^k(x)$$

olur. Bu ifade I integralinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty e^{-x} \left\{ x^k (2n + k + 1) L_n^k(x) - (n + k) L_{n-1}^k(x) \right. \\ &\quad \left. - (n + 1) L_{n+1}^k(x) \right\} L_n^k(x) dx \\ &= (2n + k + 1) \int_0^\infty e^{-x} x^k L_n^k(x) L_n^k(x) dx - (n + k) \int_0^\infty e^{-x} x^k L_{n-1}^k(x) L_n^k(x) dx \\ &\quad - (n + 1) \int_0^\infty e^{-x} x^k L_{n+1}^k(x) L_n^k(x) dx \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin sağındaki integrallerden ikicisi ve üçüncüsü diklik şartı nedeniyle sıfırdır. Birincisi ise normalizasyon şartı yardımı ile

$$I = (2n+k+1)\int_0^\infty e^{-x}x^k L_n^k(x)L_n^k(x)dx = \frac{(n+k)!}{n!}(2n+k+1)$$

bulunur.■

6.10 Bessel Fonksiyonları

Bu kesimde, Bessel fonksiyonlarını ele alacağız. Bessel fonksiyonları ile küresel koordinatlarda Schrödinger denklemini serbest parçacık için çözerken veya Helmholtz denklemini küresel veya silindirik koordinatlarda değişkenlerine ayırırken karşılaşılır. Ancak bununla sınırlı değildir. Fizik ve mühendislikte sınır değer problemlerinin çözümünde büyük bir rol oynarlar. Bessel fonksiyonları ortogonal polinom ailesine dahil değildir. Ancak yine de onlara ait bazı bağıntıları türeteceğiz. İşe üretici fonksiyonu ile başlayabiliriz. Bessel fonksiyonları $J_n(x)$ ile gösterilir. Bessel fonksiyonlarının üretici fonksiyonu ile $J_n(x)$ arasında

$$G(x,t) = e^{\frac{1}{2}x(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n \tag{6.89}$$

ilişkisi vardır. Yani üretici fonksiyonu seriye açılırsa, t^n'in katsayıları Bessel fonksiyonlarıdır. $G(x,t)$ üretici fonksiyonunu $G(x,t) = e^{xt/2}e^{-x/2t}$ şeklinde iki çarpan olarak yazılır, çarpım Maclaurin serisine açılırsa

$$e^{xt/2}e^{-x/2t} = \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^r \frac{t^r}{r!}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^s\frac{t^{-s}}{s!}$$

bulunur. Birinci toplamdaki r indisi $n = r - s (\Rightarrow r = n+s)$ ile değiştirilirse toplamın yeni sınırları $r = 0$ için $n = -s$ ve $r = \infty$ için $n = \infty$ olur. Buna göre

$$e^{xt/2}e^{-x/2t} = \sum_{n=-s}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+s}\frac{t^{n+s}}{(n+s)!}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^s\frac{t^{-s}}{s!}$$

olur. Toplamların sırası değiştirilirse eşitik bozulmaz.

$$e^{xt/2}e^{-x/2t} = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{n=-s}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+s}\frac{t^{n+s}}{(n+s)!}(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^s\frac{t^{-s}}{s!}$$

Birinci toplamda, n toplama indisinin aralığı $s = 0$ iken $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$, $s = \infty$ iken $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}$ olur. Sonuçta n toplama indisi $-\infty$'dan $+\infty$'a genişler. Bu durum

göz önüne alınarak, toplamların sırası bir kez daha değiştirilirse

$$G(x,t) = e^{\frac{1}{2}x(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} \right] t^n$$

elde edilir. Verilen bir n için, (6.89) ifadesine göre t^n'nin katsayıları $J_n(x)$ polinomlarıdır:

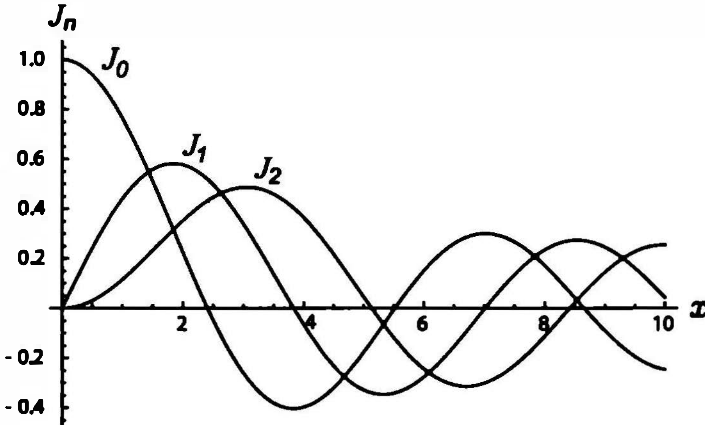
$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} \tag{6.90}$$

Birinci Tip Bessel Fonksiyonları

Eğer $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ gibi pozitif tam sayılar alınırsa, birinci türden Bessel fonksiyonları elde edilir. İlk üç $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ Bessel fonksiyonları

$$\begin{aligned} J_0(x) &= 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \frac{x^8}{147456} - \frac{x^{10}}{14745600} + \ldots \\ J_1(x) &= \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} - \frac{x^7}{18432} + \frac{x^9}{1474560} - \frac{x^{11}}{176947200} + \ldots \\ J_2(x) &= \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{96} + \frac{x^6}{3072} - \frac{x^8}{184320} + \frac{x^{10}}{17694720} - \frac{x^{12}}{2477260800} + \ldots \end{aligned}$$

şeklinde sonsuz terimli serilerdir. Serinin terim sayısı arttıkça Bessel fonksiyonlarının değeri daha hassas olur. Diğer yandan, x'in artan değerlerinde Bessel fonksiyonları daha küçük değerler alırlar. Sonlu sayıda terim için $J_0(x)$, $J_1(x)$ ve $J_2(x)$ Bessel fonksiyonlarının $[0, 10]$ aralığında x'e bağlı grafiği Şekil 6.8'daki gibidir.



Şekil 6.8 $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ fonksiyonlarının x'e göre değişimi

Birinci tip Bessel Fonksiyonlarına ait bazı bağıntıları ispatsız verelim.

Tekrarlama bağıntısı:

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) \tag{6.91}$$

Türev Bağıntıları:

$$J_n'(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x) \tag{6.92}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x) \tag{6.93}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = -x^{-n} J_{n+1}(x) \tag{6.94}$$

Birinci Tip Bessel Diferansiyel Denklemi:

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} J_n(x) + x \frac{d}{dx} J_n(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0 \tag{6.95}$$

İkinci Tip Bessel Fonksiyonları

(6.90) ifadesinde n yerine $-n$ yazılırsa

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s-n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-n}$$

bulunur. n tam sayı olduğundan $s \leq (n-1)$ için $s-n < 0$'dır. Bu durumda $(s-n)! \to \mp\infty$ olur. Bunu önlemek için s yerine $s+n$ yazılırsa, $J_{-n}(x)$ için

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+n}}{s!(s+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n} \tag{6.96}$$

elde edilir. $J_n(x)$ ve $J_{-n}(x)$ arasında

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \; n \text{ tamsayı} \tag{6.97}$$

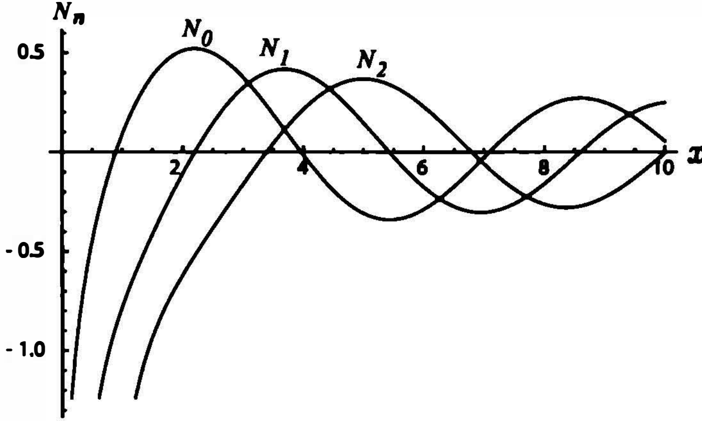
bağıntısı vardır. Bessel denkleminin en genel çözümü $J_n(x)$ ve $J_{-n}(x)$ fonksiyonlarının lineer bileşimden oluşturulabilir.

$$y(x) = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x)$$

Ancak n tamsayı olduğu zaman $J_n(x)$ ve $J_{-n}(x)$ fonksiyonları lineer bağımlı olduklarından, $y(x)$ ile verilen çözüm yeni bir fonksiyon ailesi oluşturamaz. Kaynak kitaplarda lineer bağımsız fonksiyonların uygun bir bileşimi

$$N_n(x) = \frac{Cos(n\pi) J_n(x) - J_{-n}(x)}{Sin(n\pi)} \tag{6.98}$$

şeklinde verilmiştir. $N_n(x)$, Neumann fonksiyonları olarak da bilinen ikinci tip Bessel fonksiyonlarıdır. Neumann fonksiyonlarıyla alakalı daha detaylı bilgi için ilgili kitaplara bakılmasını öneriyoruz. Bir fikir vermesi amacıyla $N_0(x)$, $N_1(x)$ ve $N_2(x)$ Neumann fonksiyonlarının $[0, 10]$ aralığında x'e bağlı grafiği Şekil 6.9'de verilmiştir.



Şekil 6.9 $N_0(x)$, $N_1(x)$, $N_2(x)$ fonksiyonlarının x'e göre değişimi

Neumann fonksiyonlarının asimtotik davranışları bilinmeden bu eğrilerin elde edilemeyeceğini belirtelim.

Üçüncü Tip Bessel Fonksiyonları

Diğer bir seçim $J_n(x)$ ve $N_n(x)$ fonksiyonlarının

$$H_n^{(1)} = J_n(x) + iN_n(x) \tag{6.99}$$

$$H_n^{(2)} = J_n(x) - iN_n(x) \tag{6.100}$$

şeklindeki bir lineer bileşimi ile elde edilen, üçüncü tip Bessel fonksiyonlarıdır. Bunlara sırasıyla, birinci ve ikinci Hankel fonksiyonları da denir. Bu fonksiyonlar lineer bağımsızdırlar.

Küresel Bessel fonksiyonları

Eğer n yarım tamsayı ise (6.90) ve (6.96) ile verilen sonsuz terimli seriler, bir trigonometrik seriyle verilebilmektedir. Bu şekilde elde edilen fonksiyonlar küresel Bessel fonksiyonları olarak isimlendirilmiştir. Bu fonksiyonlar $j_n(x)$ ve $n_n(x)$ şeklinde küçük harflerle gösterilir ve

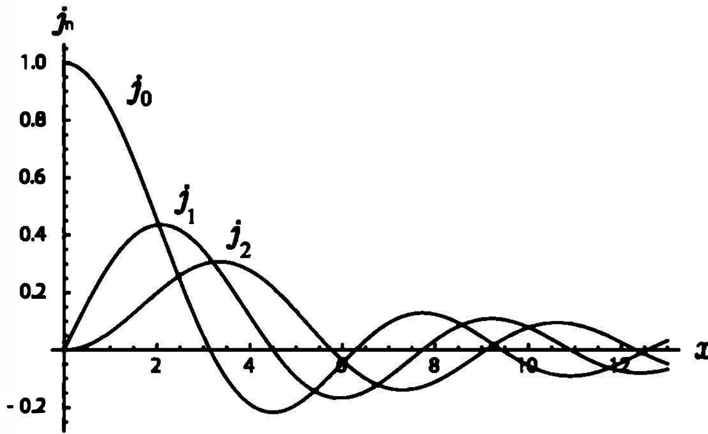
$$j_n(x) = (-1)^n x^n \left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right]^n \left(\frac{Sin(x)}{x}\right) \tag{6.101}$$

$$n_n(x) = -(-1)^n x^n \left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right]^n \left(\frac{Cos(x)}{x}\right) \tag{6.102}$$

ile verilen Rayleigh formülünden elde edilebilirler. İlk üç küresel Bessel fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

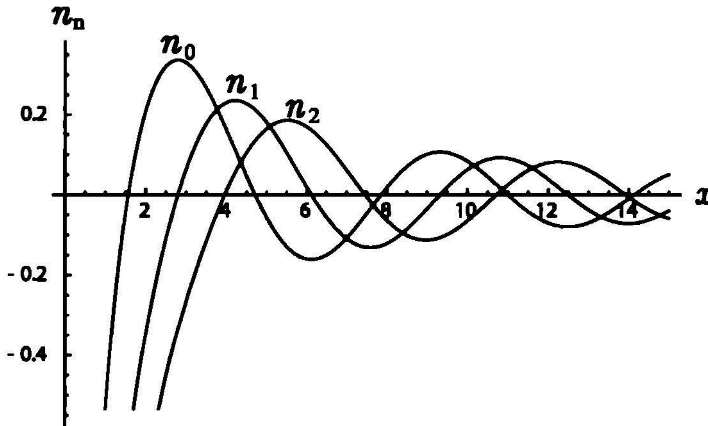
$$\begin{aligned} j_0(x) &= \frac{Sin(x)}{x},\ n_0(x) = -\frac{Cos(x)}{x},\ j_1(x) = \frac{Sin(x)}{x^2} - \frac{Cos(x)}{x} \\ n_1(x) &= -\frac{Cos(x)}{x^2} - \frac{Sin(x)}{x},\ j_2(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) Sin(x) - \frac{3}{x^2} Cos(x) \\ n_2(x) &= -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) Cos(x) - \frac{3}{x^2} Sin(x) \end{aligned}$$

$0 \leq x \leq 15$ için küresel $j_0(x)$, $j_1(x)$ ve $j_2(x)$ fonksiyonlarının x'e göre değişimi Şekil 6.10'da verilmiştir.



Şekil 6.10 $j_0(x)$, $j_1(x)$, $j_2(x)$ fonksiyonlarının x'e göre değişimi

Bu eğriler çizilirken küresel Bessel fonksiyonlarının asimtotik davranışlarının dikkate alındığını belirtmekte yarar var. Yine aynı aralıkta küresel $n_0(x)$, $n_1(x)$ ve $n_2(x)$ fonksiyonlarının x'e göre değişimi ise Şekil 6.11'deki gibidir.



Şekil 6.11 $n_0(x)$, $n_1(x), n_2(x)$ fonksiyonlarının x'e göre değişimi

Helmholtz denklemi küresel koordinatlarda değişkenlerine ayrılırsa, radyal fonksiyon $R(r)$'nin sağladığı denklem

$$r^2R''(r) + 2rR'(r) + [k^2 - n(n+1)]R(r) = 0$$

olarak karşımıza çıkar. $r \to x$ ve $R(r) \to y(x)$ değişikliği ile

$$x^2y''(x) + 2xy'(x) + [k^2 - n(n+1)]y(x) = 0 \qquad (6.103)$$

küresel Bessel diferansiyel denklemi elde edilir. Bessel fonksiyonlarının diğer bir türü yarım tam sayılı birinci ve ikinci Hankel fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar küresel Bessel fonksiyonları cinsinden

$$h_n^{(1)} = j_n(x) + in_n(x) \qquad (6.104)$$

$$h_n^{(2)} = j_n(x) - in_n(x) \qquad (6.105)$$

şeklinde tanımlanır. Bu bölümde ele aldığımız özel fonksiyonlara ve polinomlara başkalarını eklemek mümkümdür. Bu kadarıyla yetineceğiz. Çünkü bu bölüm tek başına bir kitap olabilecek durumdadır. Daha kapsamlı bilgiler için kaynak kitaplara başvurulabilir.

BÖLÜM SONU PROBLEMLERİ

6.1 n pozitif bir tamsayı olmak üzere $(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$ olduğunu gösterin.

6.2 $\int_0^1 x^3 \left[ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]^4 dx$ integralini Gama integrali cinsinden bulunuz. İpucu: $x = e^{-u}$ dönüşümü yapın.

6.3 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^4} dx$ integralini Gama integrali cinsinden bulun.

6.4 $\int_0^1 x^2(1-x^2)^{3/2}dx$ integralini Beta integrali cinsinden yazarak bulun. *İpucu:* $x^2 = u$ dönüşümü yapın. *Cevap:* $\frac{B(3/2,5/2)}{2} = \frac{\pi}{32}$.

6.5 $\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)}\sqrt{\pi}$ olduğunu gösterin.

6.6 $\int_0^{\pi/2} Cos^n\theta d\theta$ integralini Beta fonksiyonunu kullanarak hesaplayın.

6.7 $H_0(x) = 1$ ve $H_1(x) = 2x$ başlangıç değerlerini kullanarak $H_2(x)$, $H_3(x)$, $H_4(x)$ ve $H_5(x)$ polinomlarını (6.32) yardımı ile bulun.

6.8 $H_1(x)$ ve $H_2(x)$ polinomlarının dik olduklarını (6.37) ile verilen integrali açıkça hesaplayarak gösterin.

6.9 Bir boyutlu harmonik osilatör için x^2'nin beklenen değerinin $\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} H_n(x) H_n(x) dx = \sqrt{\pi} 2^n n! \, (n + 1/2)$ olduğunu gösterin.

6.10 P_0, P_1 ve P_2 Legendre polinomlarını kullanarak $n = 0$ ve $n = 1$ için (6.50) ile verilen eşitliğin sağlandığını kontrol edin.

6.11 (6.9) ile verilen üretici fonksiyonunu kullanarak $x \frac{\partial}{\partial x} G(x, t) = t \frac{\partial}{\partial t} G(x, t) - t \frac{\partial}{\partial t} \left[t G(x, t) \right]$ olduğunu gösterin.

KAYNAKLAR

1 Ahmed Yüksel Özemre, Fizikte Matematik Metodlar, Matbaa Teknisyenleri Kol. Şti(1971).

2 Bekir Karaoğlu, Fizik ve Mühendislikte Matematik Yöntemler, 6. Basım, Seçkin Yayınları(2009).

3 Cevat Kart, Matris Metodları ve Lineer Dönüşümler, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları(1985).

4 George B. Arfken, Hans J. Weber, Mathematical Methods for Physicists, Sixth Edition, Elsevier Akademic Press(2005).

5 George B. Thomas, Jr., Thoma's Calculus revised by Maurice D. Weir and Joel Hass, Twelfth Edition. Pearson(2010).

6 K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence, Mathematical Methods for Physics and Engineering,Third Edition. Cambridge Universty Press (2006).

7 M. Abramowitzs and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, US Deparment of Commerce National Bureau of Standards Applied Mathematics Series No. 55(1972).

8 Mary L. Boas, Mathematical Metdods in the Physical Sciences, Third Edition, John Wiley and Sons(2006).

9 Niels Walet with additions by Mike Godfrey, and based on work by Graham Shaw, Mathematical Methods for Physics PHYS 30672 Electronic Book: https://theory.physics.manchester.ac.uk/~godfrey/ lecture/PHYS30672/Notes.pdf(2016).

10 Sadri Hassani, Mathematical Methods for Students of Physics and Related Fields, Springer(2000).

11 Sadri Hassani, Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, Springer(2002).

12 Saffet Nezir, Fizikte Matematik Metodlar 1, Palme Yayıncılık(2007).

13 Selçuk Ş. Bayın, Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler, Metu Press(2000).

14 Ş. Coşkun Önem, Mühendislik ve Fizikte Matematik Metodlar, Birsen yayınevi(2011).

15 Tai L. Chow, Mathematical Methods for Physicists: A concise introduction, Cambridge Universty Press(2003).

DİZİN

Prof. Dr. Zeynel YALÇIN

Fizikte Matematik Metodlara Giriş

Bu kitap; Fizik, Fizik Mühendisliği ve Fizik Öğretmenliği programlarında öğrenim gören öğrencilere okutulan "Fizikte Matematik Metodlar" dersi için yazılmıştır. Ancak, Fizik ve Mühendislik alanında lisansüstü öğrenim gören öğrencilere de hitap etmektedir. Konular, sade bir dil kullanılarak ve çok sayıda şekil, tablo ve grafikle desteklenerek anlatılmıştır.

Diğer kitaplardan farklı olarak, pek çok teorem ve özdeşlik detayları atlanmadan ispatlanmıştır. Basitten zora doğru, çok sayıda örnek problem çözümü yapılarak, okuyucunun kendi kendine çalışmasına da imkân tanınmıştır.

Vektörler ~ Bir Alanın Türevi ve Vektör İntegral

Matrisler ~ Dik Eğrisel Koordinatlar

Lineer Vektör Uzayları ve Lineer İşlemciler

Bazı Özel Fonksiyonlar ve Ortogonal Polinomlar



seçkin | Akademik ve Mesleki Yayınlar
Mustafa Kemal Mahallesi 2158. Sokak
No:13 Çankaya | ANKARA
Tel: (312) 435 30 30 Faks: (312) 435 24 72
www.seckin.com.tr seckin@seckin.com.tr

ISBN 978 975 02 5518 2



Kategori:
Fen Bilimleri

Konu:
Fizik